СМС

СУПЕРМОБИЛЬНЫЙ

СПРАВОЧНИК

МАТЕМАТИКА

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

QR-КОД К КАЖДОЙ ИЗУЧАЕМОЙ ТЕМЕ

12+

СМС

СУПЕРМОБИЛЬНЫЙ
СПРАВОЧНИК

В.И. ВЕРБИЦКИЙ

МАТЕМАТИКА

- КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ
- МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ
- QR-КОД К КАЖДОЙ ИЗУЧАЕМОЙ ТЕМЕ

МОСКВА
ЭКСМО

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
В 31

Вербицкий В. И.

В 31 Математика / В. И. Вербицкий. — М. : Эксмо, 2013. — 160 с. — (Супермобильный справочник).

Справочник охватывает весь школьный курс математики. Материал систематизирован и представлен в сжатом и наглядном виде. С помощью QR-кода предоставляется быстрый доступ к информационным ресурсам общего пользования (Wikipedia) по каждой конкретной теме для самостоятельного углубленного изучения. Справочник поможет эффективно подготовиться к ЕГЭ, а также сэкономить время.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

Ответственный редактор *А. Жилинская.* Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *Е. Брынчик*

ООО «Издательство «Эксмо»
127299, Москва, ул. Клары Цеткин, д. 18/5. Тел. 411-68-86, 956-39-21.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 127299, Мәскеу, Клара Цеткин көшесі, 18/5 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86, 8 (495) 956-39-21.
Home page: www.eksmo.ru . E-mail: info@eksmo.ru.
Қазақстан Республикасындағы Өкілдігі: «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қаласы,
Домбровский көшесі, 3«а», Б литері, 1 кеңсе. Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92,
факс: 8 (727) 251 58 12 ішкі 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Қазақстан Республикасының аумағында өнімдер бойынша шағымды Қазақстан
Республикасындағы Өкілдігі қабылдайды: «РДЦ-Алматы» ЖШС,
Алматы қаласы, Домбровский көшесі, 3«а», Б литері, 1 кеңсе.
Өнімдердің жарамдылық мерзімі шектелмеген.

Произведено 03.12.2012. Формат $70x90^1/_{32}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,83. Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-58158-0

9 785699 581580 >

ISBN 978-5-699-58158-0

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Справочник представляет собой краткое изложение школьного курса математики для учащихся старших классов и абитуриентов и ориентирован на подготовку к единому государственному экзамену. В книгу включены материалы по таким разделам школьной программы: «Алгебра», «Геометрия», «Начала математического анализа», «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей».

Справочник прост и удобен в использовании:

- материалы школьного курса систематизированы и изложены в конспективной, удобной для повторения и запоминания форме;
- в справочнике объединены теоретические материалы, соответствующие требованиям и формату ЕГЭ;
- используемые в справочнике QR-коды дают возможность получить максимально быстрый доступ к информационным ресурсам Интернета.

В каждом QR-коде зашифрована ссылка по конкретной теме на информационный ресурс, которую легко можно считать обычным мобильным телефоном, установив специальную программу типа Upcode или ScanLife.

Издание подготовлено в соответствии с современными требованиями школьной программы и может быть полезно при выполнении домашних заданий, подготовке к самостоятельным и контрольным работам, единому государственному экзамену.

1 АЛГЕБРА

1.1. Числа, корни и степени

1.1.1. Целые числа

Целыми числами называют натуральные числа, т. е. числа, используемые для счета (1; 2; 3; ...), нуль (0) и числа, противоположные натуральным (–1; –2; –3; ...).

Число 1 (единица) не относится ни к простым, ни к составным числам.

Множество натуральных чисел обозначается N, множество целых чисел — Z.

Натуральное число, не равное единице, называется *простым*, если оно делится только на себя и на единицу. Натуральное число, отличное от единицы и не являющееся простым, называется *составным*.

Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители.

Пример 1. Разложить на простые множители: а) 18; б) 37; в) 360.

Решение: а) $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$;

б) 37 — простое число, т. е. $37 = 37 \cdot 1$;

в) 360 можно разложить на простые множители делением «в столбик» так:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$, т. е. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Наименьшее общее кратное натуральных чисел n_1; n_2; ...; n_k (НОК$\{n_1; n_2; ...; n_k\}$) — это наименьшее натуральное число, которое делится на все указанные числа без остатка.

Наибольший общий делитель (НОД$\{n_1; n_2; ...; n_k\}$) — это наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка все указанные числа.

Для нахождения НОК и НОД следует разложить каждое из чисел на простые множители. НОК равно произведению всех образовавшихся простых чисел, каждое из которых возводится в наибольшую из степеней, в которых оно входит в разложения. НОД равен произведению всех простых множителей, общих для всех чисел, каждый из которых возведен в наименьшую из степеней, в которых оно входит в разложения. Если общих простых множителей нет, то НОД равен 1.

Числа m и n называются взаимно простыми, если НОД$\{m; n\} = 1$

Пример 2. Вычислить: а) НОК$\{12; 108; 162\}$; б) НОД$\{12; 108; 162\}$.

Решение:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$, т. е. $12 = 2^2 \cdot 3$;

$$\begin{array}{r|l} 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}, \text{ т. е. } 108 = 2^2 \cdot 3^3;$$

$$\begin{array}{r|l} 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}, \text{ т. е. } 162 = 2 \cdot 3^4.$$

а) НОК$\{12; 108; 162\} = 2^2 \cdot 3^4 = 324$;
б) НОД$\{12; 108; 162\} = 2 \cdot 3 = 6$.
Ответ: а) 324; б) 6.

Свойства действий над целыми числами

Свойства сложения	
$m+n = n+m$	переместительное свойство
$(m+n)+l = m+(n+l)$	сочетательное свойство
$n+0 = n$	свойство нуля
$m+(-m) = 0$	сумма противоположных чисел
Свойства вычитания	
$m-(n+l) = m-n-l$	вычитание суммы чисел от числа
$(m+n)-l = (m-l)+n = m+(n-l)$	вычитание числа от суммы чисел

$m-0=m$	свойство нуля
$0-m=-m$	свойство нуля
Свойства умножения	
$mn=nm$	переместительное свойство
$(mn)l=m(nl)$	сочетательное свойство
$(m+n)l=ml+nl$	распределительное свойство
$(m-n)l=ml-nl$	распределительное свойство
$m\cdot 1=m$	свойство единицы
$m\cdot 0=0$	свойство нуля
$m\cdot\frac{1}{m}=1$, если $m\neq 0$	свойство обратных чисел
Свойства деления	
$(m\cdot n):l=m\cdot(n:l)=$ $=(m:l)\cdot n$	деление произведения на число
$(m+n):l=m:l+n:l$	деление суммы на число
$(m-n):l=m:l-n:l$	деление разности на число
$m:(n\cdot l)=(m:n):l=$ $=(m:l):n$	деление числа на произведение
$\cancel{m:0}$	делить на нуль нельзя!

1.1.2 Степень с натуральным показателем

n*-й натуральной степенью числа *a называется число b, полученное в результате умножения числа a на себя n раз: $a^n = b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$.

$(-a)^n = a^n$,
если n — четное;
$(-a)^n = -a^n$,
если n — нечетное.

По определению
$a^1 = a$.

Число a называется *основанием степени*, n — *показателем степени*.

Пример. Вычислить:

а) $(-5)^3$; б) $(-3)^4$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; г) $\left(2\frac{3}{5}\right)^2$.

Решение: а) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$;
б) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$;

г) $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$; $\left(2\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} = 6\frac{19}{25}$.

Ответ: а) -125; б) 81; в) $\frac{8}{27}$; г) $6\frac{19}{25}$.

1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа

Рациональное число — это дробь вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$. Число m называется *числителем*, n — *знаменателем*.

Дробь $\frac{m}{n}$ называется *несократимой*, если m и n взаимно просты. В противном случае дробь можно сократить, разделив числитель и знаменатель на их НОД. Например: $\frac{8}{12}=\frac{2^3}{2^2\cdot 3}=\frac{2^2\cdot 2}{2^2\cdot 3}=\frac{2}{3}$.

Вообще, $\frac{km}{kn}=\frac{m}{n}$.

Правильной называется дробь $\frac{m}{n}$, если $|m|<n$.

Неправильной называется дробь $\frac{m}{n}$, если $|m|\geq n$.

Неправильную дробь можно записать, выделив целую часть. Для этого следует разделить m на n с остатком:

$$\frac{m}{n}=p+\frac{q}{n},$$

где p — частное, q — остаток.

Например: $\frac{25}{8}=\frac{3\cdot 8+1}{8}=3+\frac{1}{8}=3\frac{1}{8}$.

Любое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Если в разложении знаменателя несократимой дроби на простые множители нет множителей, отличных от 2 и 5, то дробь будет *конечной*, в противном случае — *бесконечной периодической*.

Преобразование обыкновенной дроби в десятичную осуществляется путем деления в столбик и дописыванием нуля к каждому ненулевому остатку.

Пример 1. Представить в виде десятичной дроби: а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{14}$.

Решение: а)

$$\begin{array}{r|l} -50 & 8 \\ 48 & 0{,}625 \\ \hline -20 & \\ 16 & \\ \hline -40 & \\ 40 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\frac{5}{8} = 0{,}625$ — конечная десятичная дробь

б)

$$\begin{array}{r|l} -100 & 14 \\ 98 & 0{,}07142857\ldots \\ \hline -20 & \\ 14 & \\ \hline -60 & \\ 56 & \\ \hline -40 & \\ 28 & \\ \hline -120 & \\ 112 & \\ \hline -80 & \\ 70 & \\ \hline 100 & \end{array}$$

$\frac{1}{14} = 0{,}0(714285)$ — бесконечная десятичная дробь

Ответ: а) 0,625; б) 0,0(714285).

Преобразование дробей

Преобразование конечной десятичной дроби в обыкновенную	
$0,\overline{a_1a_2\ldots a_n} = \frac{\overline{a_1a_2\ldots a_n}}{10^n}$, где $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ — число из n цифр, в котором a_k — k-я цифра	**Пример.** $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; $0,137 = \frac{137}{1000}$.

Преобразование десятичной периодической дроби в обыкновенную

$$0,\overline{a_1\ldots a_m}\left(\overline{b_1\ldots b_n}\right)=\frac{\overline{a_1\ldots a_m b_1\ldots b_n}-\overline{a_1\ldots a_m}}{\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m\text{ раз}}}.$$

В частности, $0,\left(\overline{b_1\ldots b_n}\right)=\dfrac{\overline{b_1\ldots b_n}}{\underbrace{9\ldots9}_{n\text{ раз}}}$.

Пример. Представить в виде обыкновенной дроби: а) 0,(27); б) 0,11(7).

Решение:

а) $0,27=\dfrac{27}{99}=\dfrac{3}{11}$; б) $0,11(7)=\dfrac{117-11}{900}=\dfrac{106}{900}=\dfrac{53}{450}$.

Ответ: а) $\dfrac{3}{11}$; б) $\dfrac{53}{450}$.

Сложение и вычитание дробей

При сложении дробей с одинаковыми знаменателями работает правило:

$$\frac{k}{n}\pm\frac{l}{n}=\frac{k\pm l}{n}.$$

Для сложения и вычитания дробей следует привести их к общему знаменателю и сложить (или вычесть) числители. Общим знаменателем является НОК знаменателей исходных дробей.

Пример 2. Вычислить: а) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{7}$; б) $\dfrac{7}{27}+\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{27}$.

Решение:

а) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{2+1}{7}=\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{7}{27}+\dfrac{2}{27}-\dfrac{1}{27}=\dfrac{7+2-1}{27}=\dfrac{8}{27}$.

Ответ: а) $\dfrac{3}{7}$; б) $\dfrac{8}{27}$.

Пример 3. Вычислить: а) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}$; б) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}$.

Решение:

а) $\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{2\cdot7}{3\cdot7}+\frac{5\cdot3}{7\cdot3}=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{14+15}{21}=\frac{29}{21}$;

б) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{7}{8}=\frac{1\cdot8}{3\cdot8}+\frac{5\cdot4}{6\cdot4}-\frac{7\cdot3}{8\cdot3}=$

$=\frac{8}{24}+\frac{20}{24}-\frac{21}{24}=\frac{8+20-21}{24}=\frac{7}{24}$.

Ответ: а) $\frac{29}{21}$; б) $\frac{7}{24}$.

Умножение и деление дробей

$\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}=\frac{km}{ln}$; $\frac{k}{l}:\frac{m}{n}=\frac{kn}{lm}$.

Если среди дробей есть целое число r, его представляют как $\frac{r}{1}$.

Пример. Вычислить: а) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$; б) $1\frac{3}{4}:2\frac{7}{9}$; в) $6:\frac{3}{7}$.

Решение: а) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{2\cdot3}{5\cdot8}=\frac{\cancel{2}\cdot3}{\cancel{2}\cdot5\cdot4}=\frac{3}{20}$;

б) $1\frac{3}{4}:2\frac{7}{9}=\frac{7}{4}:\frac{25}{9}=\frac{7\cdot9}{25\cdot4}=\frac{63}{100}$;

в) $6:\frac{3}{7}=\frac{6}{1}:\frac{3}{7}=\frac{6\cdot7}{3\cdot1}=\frac{3\cdot2\cdot7}{3}=14$.

Ответ: а) $\frac{3}{20}$; б) $\frac{63}{100}$; в) 14.

Все свойства действий над целыми числами сохраняются для рациональных чисел. Кроме того, $\frac{p}{-q}=\frac{-p}{q}=-\frac{p}{q}$; $\frac{-p}{-q}=\frac{p}{q}$.

Пример 4. Вычислить: $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)$.

Решение: $\left(-\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)=\frac{5}{6}:\frac{6}{7}=\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}=\frac{35}{36}$.

Ответ: $\frac{35}{36}$.

Проценты, нахождение процента от величины и величины по ее проценту

Процентом от величины называется сотая часть этой величины:

$$1\,\%\cdot x=\frac{x}{100};\quad p\,\%\cdot x=\frac{p\cdot x}{100}.$$

Пример 5. Найти 2 % от 30.

Решение: $2\,\%\cdot 30=\frac{2\cdot 30}{100}=\frac{3}{5}$. Ответ можно дать и в виде десятичной дроби: $2\,\%\cdot 30=\frac{60}{100}=0{,}6$.

Ответ: $\frac{3}{5}$ или 0,6.

Пример 6. Найти число, если 3 % от него составляет 27.

Решение: $3\,\%\cdot x=27$; $\frac{3x}{100}=27$; $x=\frac{100\cdot 27}{3}=900$.

Ответ: 900.

Пример 7. Найти процент содержания соли в растворе, если 50 кг раствора содержит 4 кг соли.

Решение: $50\cdot x\,\%=4$; $\frac{50\cdot x}{100}=4$; $x=\frac{4\cdot 100}{50}=8$.

Ответ: 8 %.

Пример 8. Сколько соли растворено в 10 кг семипроцентного раствора?

Решение: $\frac{10\cdot 7\,\%}{100}=\frac{7}{10}=0{,}7$ кг $=700$ г.

Ответ: 700 г.

1.1.4. Степень с целым показателем

Если $a \neq 0$, то по определению $a^0 = 1$; 0^0 — не определено.

Если $a \neq 0$, то по определению $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Например: $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$;

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1^3}{2^3} = -\frac{1}{8}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 = -8.$$

$(-a)^n = a^n$, если n — четное;
$(-a)^n = -a^n$, если n — нечетное

Свойства степени с целым показателем

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^7 \cdot 3^{-2} = 3^{7-2} = 3^5 = 243$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-3} : 5^{-5} = 3^{-3+5} = 5^2 = 25$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$((-2)^3)^2 = (-2)^6 = 64$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$

1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства

Корнем степени *n* из действительного числа *a* называется такое число, n-я степень которого равна a.

Корень второй степени иначе называется *квадратным*, третьей — *кубическим*.

Например: $\sqrt{9} = \pm 3$; $\sqrt[3]{125} = 5$; $\sqrt[4]{0} = 0$.

Арифметическим корнем степени n из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Обозначение $\sqrt[n]{a}$ используется, как правило, именно для арифметического квадратного корня (т. е. $\sqrt{9} = 3$).

Если $a < 0$ и n нечетно, то корень n-й степени из a также обозначается $\sqrt[n]{a}$. Например: $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Если $k \in \mathrm{N}$, то $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$; $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$

Пример. Вычислить: а) $\sqrt[7]{5^7}$; б) $\sqrt[8]{(-3)^8}$.

Решение: а) $\sqrt[7]{5^7} = 5$; б) $\sqrt[8]{(-3)^8} = |-3| = 3$.

Ответ: а) 5; б) 3.

Свойства корня степени n

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{432} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt[3]{-\dfrac{125}{343}} = \dfrac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{343}} = -\dfrac{5}{7}$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$; $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}\,(k \in \mathrm{N})$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{7\sqrt{7}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{7^2} \cdot \sqrt{7}}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{\left(\sqrt{7}\right)^3}} = \sqrt[5]{\sqrt{7}} = \sqrt[10]{7}$
Если $a \geq 0$, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[8]{3}$

1.1.6. Степень с рациональным показателем и ее свойства

По определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a > 0$, $m \in \mathrm{Z}$, $n \in \mathrm{N}$.

Например:

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3; \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Отметим, что $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$; $a > 0$, $n \in \mathrm{N}$.

Свойства степени с рациональным показателем

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};$$

$$(a^p)^q = a^{pq}; \qquad (ab)^p = a^p \cdot b^p;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{b^p}{a^p}.$$

Если $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$; $a^r > b^r$ при $r < 0$. Если $r > s$, то $a^r > a^s$ при $a > 1$; $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

Пример 1. Представить в виде степени: $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} : x^{\frac{3}{7}}$.

Решение: $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{5}} : x^{\frac{3}{7}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{3}{7}} = x^{\frac{32}{105}}$.

Ответ: $x^{\frac{32}{105}}$.

Пример 2. Упростить: $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} : (xy^6)^{\frac{1}{3}}$.

Решение:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} : (xy^6)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}} : \left(x^{\frac{1}{3}} y^{6\cdot\frac{1}{3}}\right) = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot y^2} = \frac{x^{\frac{4}{5}-\frac{1}{3}}}{y^2} = \frac{x^{\frac{7}{15}}}{y^2}.$$

Ответ: $\dfrac{x^{\frac{7}{15}}}{y^2}$.

Пример 3. Сократить дробь: $\dfrac{32m^4n^2}{24m^2n^6}$.

Решение: $\dfrac{32m^4n^2}{24m^2n^6} = \dfrac{2^5 \cdot m^4n^2}{2^3 \cdot 3m^2n^6} = \dfrac{2^2 \cdot m^2}{3n^4} = \dfrac{4m^2}{3n^4}$.

Ответ: $\dfrac{4m^2}{3n^4}$.

Пример 4. Сравнить: а) $0{,}8^{-0{,}2}$ и $0{,}9^{-0{,}2}$; б) $0{,}7^{35}$ и $0{,}7^{36}$; в) $5^{\frac{1}{3}}$ и $5^{\frac{1}{4}}$.

Решение: а) поскольку $0<0{,}8<0{,}9$; $-0{,}2<0$, то $0{,}8^{-0{,}2}>0{,}9^{-0{,}2}$; б) поскольку $0<0{,}7<1$; $35<36$, то $0{,}7^{35}>0{,}7^{36}$; в) поскольку $5>1$; $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$, то $5^{\frac{1}{3}}>5^{\frac{1}{4}}$.

1.1.7. Свойства степени с действительным показателем

Для степени с действительным показателем сохраняются все свойства степени с рациональным показателем. Повторим их.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q};$$

$$(a^p)^q = a^{pq}; \qquad (ab)^p = a^p \cdot b^p;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \frac{b^p}{a^p}.$$

Если $a < b$, $r > 0$, то $a^r < b^r$; если $a < b$, $r < 0$, то $a^r > b^r$.

Если $a > 1$, $r > s$, то $a^r > a^s$; если $a < 1$, $r > s$, то $a^r < a^s$.

(Здесь везде $a > 0$, $b > 0$.)

1.2. Основы тригонометрии

1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

Для определения основных тригонометрических функций рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Синусом угла α называется ордината точки $M\alpha$, полученной поворотом точки $M_0(1; 0)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол α.

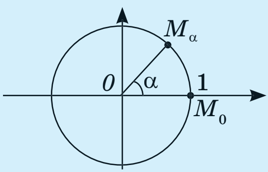


Рис. 1.1

Косинусом угла α называется абсцисса той же точки $M\alpha$.

Синус и косинус угла обозначаются так: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$. Они определены для любого угла α, причем $|\sin\alpha| \le 1$; $|\cos\alpha| \le 1$.

Тангенс и **котангенс угла** α определяются по формулам:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Тангенс определен для всех $\alpha \ne 90° + n \cdot 180°$; котангенс определен для всех $\alpha \ne n \cdot 180°$ $(n \in Z)$.

При $n \in Z$ имеют место равенства:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin(\alpha + n \cdot 360°) = \sin\alpha$; $\cos(\alpha + n \cdot 360°) = \cos\alpha$;

$\operatorname{tg}(\alpha + n \cdot 180°) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\alpha + n \cdot 180°) = \operatorname{ctg}\alpha$;

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$;

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Значения основных тригонометрических функций для некоторых углов

α, рад	$0°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Пример 1. Вычислить:

$\sin 120° + \cos 330° + 2\,\mathrm{tg}\,135° + \mathrm{tg}\,120°$.

Решение: $\sin 120° + \cos 330° + 2\mathrm{tg}\,135° + \mathrm{tg}\,120° =$

$$= \sin(180° - 60°) + \cos(360° + (-30°)) +$$

$$+ 2\mathrm{tg}(180° + (-45°)) + \mathrm{tg}(180° + (-60°)) =$$

$$= \sin 60° + \cos(-30°) + 2\mathrm{tg}(-45°) + \mathrm{tg}(-60°) =$$

$$= \sin 60° + \cos 30° - 2\mathrm{tg}\,45° - \mathrm{tg}\,60° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 - \sqrt{3} = -2.$$

Ответ: -2.

Пример 2. Вычислить:

$$\sin 180° \cos 270° + \frac{1}{\cos 360°} + \frac{1}{\sin(-270°)}.$$

Решение: $0 \cdot 0 + \frac{1}{1} - \frac{1}{-1} = 1 + 1 = 2.$

Ответ: 2.

Пример 3. Вычислить:
$\sin(-30°) + 2\cos(-60°) - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{ctg}(-45°)$.

Решение: $-\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-1\cdot(-1)=-\frac{1}{2}+1+1=1{,}5$.

Ответ: 1,5.

1.2.2. Радианная мера угла

Рассмотрим окружность радиуса R. Ее длина равна $2\pi R$, где $\pi \approx \approx 3{,}14$.

Радиан — это величина центрального угла, соответствующего дуге длиною R.

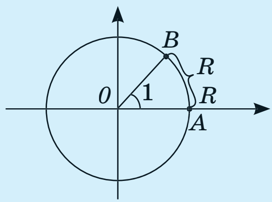


Рис. 1.2

На рис. 1.2 отмечен угол AOB величиною 1 радиан.

$$1\text{ рад} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°;$$

$$1° = \frac{\pi\text{ рад}}{180} \approx 0{,}01745\text{ рад}.$$

$$90° = \frac{\pi}{2}\text{ рад};\ 60° = \frac{\pi}{3}\text{ рад};$$

$$45° = \frac{\pi}{4}\text{ рад};\ 30° = \frac{\pi}{6}\text{ рад};\ 360° = 2\pi\text{ рад};\ 180° = \pi\text{ рад}.$$

$$x\text{ рад} = \frac{180°\cdot x}{\pi};\quad \alpha° = \frac{\alpha\cdot\pi}{180}\text{ рад}.$$

Пример 1. Перевести в радианную меру: а) 270°; б) 15°.

Решение:

а) $270° = \frac{270\cdot x}{\pi} = \frac{3\pi}{2}$ рад; б) $15° = \frac{15\cdot x}{\pi} = \frac{\pi}{12}$ рад.

Ответ: а) $\frac{3\pi}{2}$ рад; б) $\frac{\pi}{12}$ рад.

Пример 2. Перевести в градусную меру: а) $\frac{4\pi}{3}$ рад; б) 3 рад.

Решение: а) $\frac{4\pi}{3}$ рад $= \frac{4 \cdot 180°}{3} = 240°$;

б) $3 \text{ рад} = \frac{3 \cdot 180°}{\pi} = \frac{540°}{\pi} \approx 171{,}9°$.

Ответ: а) 240°; б) ≈171,9°.

Пример 3. Вычислить $\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\pi$.

Решение: $\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

1.2.3. Синус, косинус и тангенс числа

Тригонометрической функцией числа x называется соответствующая функция угла величиной x радиан.

Синус и косинус определены для всех значений x, тангенс — для $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, котангенс — для $x \neq \pi n$ ($n \in \mathrm{Z}$).

Пример 1. Вычислить: $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

Решение: $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} =$

$= 0 - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot 1 \cdot \operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

Ответ: 3.

Пример 2. Сравнить: а) $\sin\frac{\pi}{4}$ и $\sin 30°$;
б) $\cos 18°$ и $\cos\frac{3\pi}{2}$.

Решение: а) $\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45°$; углы $30°$ и $45°$ находятся в I четверти, где с увеличением угла увеличивается и синус угла, т. е. $\sin 45° > \sin 30°$.

б) $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270° = 0$.

Ответ: а) $\sin\frac{\pi}{4} > \sin 30°$; б) $\cos 18° > \cos\frac{3\pi}{2}$.

1.2.4. Основные тригонометрические тождества

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Следствия:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha};\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Другие тригонометрические тождества:

$$1+\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

Пример 1. а) Упростить: $1 + \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$;
б) доказать тождество:
$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Решение: а) $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha =$
$= (1 - \cos^2\alpha) + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha$;
б) $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$;
$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2 = 1$,
что и требовалось доказать.

Пример 2. Известно, что $\cos\alpha = 0{,}6$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Найти $\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение: $\sin\alpha < 0$ (см. рис. 1.1).

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}6^2} = -0{,}8;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $-0{,}8$; $-\frac{4}{3}$; $-\frac{3}{4}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = -2$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{5}$;

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$. $\sin\alpha > 0$; $\cos\alpha < 0$ (см. рис. 1.1).

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{\sqrt{5}}{5}$; $-\frac{1}{2}$.

1.2.5. Формулы приведения

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$;

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$;

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$;

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Пример 1. Вычислить: $\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{6}$.

Решение: $\cos\frac{4\pi}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{6}=$

$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$

$=-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\left(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}=0.$

Ответ: 0.

Пример 2. Упростить выражение:

а) $3\sin(\pi-x)+2\sin(-x)-\sin(\pi+x)$;

б) $\sin\frac{7\pi}{6}-\cos(\alpha-\pi)-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$.

Решение: а) $3\sin(\pi-x)+2\sin(-x)-\sin(\pi+x)=$
$=3\sin x-2\sin x+\sin x=2\sin x$;

б) $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$;

$\cos(\alpha-\pi)=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$;

$\operatorname{tg}(\alpha-\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(2\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha.$

Имеем: $-\frac{1}{2}+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\cos\alpha-\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $2\sin x$; б) $\cos\alpha-\frac{1}{2}$.

1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$(\sin\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\quad$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Пример 1. Вычислить: а) $\sin 75°$; б) $\cos 75°$; в) $\operatorname{tg} 75°$.

Решение: а) $\sin 75° = \sin(45° + 30°) =$
$= \sin 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \sin 30° =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

б) $\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° - \sin 45° \cdot \sin 30° =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

в) $\operatorname{tg} 75° = \operatorname{tg}(45° + 30°) = \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg} 30°} = \dfrac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$
$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}.$$

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; в) $2+\sqrt{3}$.

Пример 2. Вычислить: $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12}$.

Решение: $\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}.$$

Ответ: $2+\sqrt{3}$.

1.2.7. Синус и косинус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$
$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

Пример 1. Вычислить:
а) $\sin 22{,}5^\circ \cdot \cos 22{,}5^\circ$; б) $\sin^2 15^\circ$.

Решение: а) $\sin 22{,}5^\circ \cdot \cos 22{,}5^\circ = \frac{1}{2}\sin 2 \cdot 22{,}5^\circ =$

$$= \frac{1}{2}\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

б) $\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2 \cdot 15^\circ) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 30^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$.

Пример 2. Дано: $\cos x = -\frac{5}{13}$, $\sin x > 0$.

Вычислить: $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

Решение: $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x =$

$$= 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{169}} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169};$$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ или

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{2 \cdot 25}{169} - 1 =$$

$$= \frac{50 - 169}{169} = -\frac{119}{169};$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{120}{169} : \left(-\frac{119}{169}\right) = \frac{120}{119} = 1\frac{1}{119}.$$

Ответ: $\sin 2x = -\frac{120}{169}$; $\cos 2x = -\frac{119}{169}$; $\operatorname{tg} 2x = 1\frac{1}{119}$.

Пример 3. Выразить $\cos 2t$ через $\operatorname{tg} t$.

Решение: $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = \frac{\sin^2 t}{\operatorname{tg}^2 t} - \sin^2 t =$

$$= \sin^2 t \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{\operatorname{tg}^2 t} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}.$$

Ответ: $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}$.

1

1.3. Логарифмы

1.3.1. Логарифм числа

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Для логарифма числа b по основанию a используется обозначение $\log_a b$.

$$x = \log_a b, \text{ если } a^x = b; \quad a^{\log_a b} = b.$$
$$\log_a 1 = 0; \ \log_a a = 1$$

Пример 1. Вычислить: а) $\log_3 9$; б) $\log_5 \sqrt[3]{5}$.

Решение: а) $3^2 = 9$. Значит, $\log_3 9 = 2$.

б) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$. Значит, $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$.

Ответ: а) 2; б) $\frac{1}{3}$.

Пример 2. Найти x, если $\log_2 x = -3$.

Решение: $x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Пример 3. Найти $\log_7 \frac{1}{343}$.

Решение: $\log_7 \frac{1}{343} = \log_7 7^{-3} = -3$.

Ответ: -3.

Пример 4. Найти x, если $\log_x \frac{1}{49} = -2$.

Решение: $x^{-2} = \frac{1}{49}$; $x^{-2} = 7^{-2}$; $x = 7$.

Ответ: 7.

1.3.2. Логарифмы произведения, частного, степени

Если $x > 0$, $y > 0$, то:
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Пример 1. Вычислить: а) $\log_6 2 + \log_6 3$; б) $\log_2 2\sqrt{2}$; в) $\log_2 36 - \log_2 9$.

Решение: а) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$;

б) $\log_2 2\sqrt{2} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$;

в) $\log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 \frac{36}{9} = \log_2 4 = 2$.

Ответ: а) 1; 2) 1,5; в) 2.

Если $x > 0$, то $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$

Пример 2. Вычислить: а) $\log_4 \sqrt{2}$; б) $\log_{\sqrt{7}} 343$; в) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27}$.

Решение: а) $\log_4 \sqrt{2} = \log_4 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_4 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

б) $\log_{\sqrt{7}} 343 = \log_{\sqrt{7}} 7^3 = 3 \cdot \log_{\sqrt{7}} 7 = 3 \cdot 2 = 6$;

в) $3\log_2 16 + 4\log_3 \frac{1}{27} = 3\log_2 2^4 + 4\log_3 3^{-3} =$

$= 3 \cdot 4 \cdot (\log_2 2) + 4 \cdot (-3) \cdot \log_3 3 = 12 \cdot 1 - 12 \cdot 1 = 0.$

Ответ: а) $\frac{1}{4}$; б) 6; в) 0.

1.3.3. Десятичный и натуральный логарифмы, число *e*

Десятичным логарифмом числа называется его логарифм по основанию 10:

$$\lg a = \log_{10} a;\ 10^{\lg a} = a.$$

Например: $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$; $\lg\sqrt{10} = 0{,}5$; $\lg 0{,}001 = -3$ и т. д.

Натуральным логарифмом числа называется его логарифм по основанию e, где e — постоянная, приближенно равная 2,718:

$$\ln a = \log_e a;\ e \approx 2{,}718;$$

$$e^{\ln a} = a.$$

Например: $\ln e = 1$; $\ln\sqrt{e} = 0{,}5$; $\ln\frac{1}{e} = -1$.

Пример 1. Прологарифмировать выражение $x = 5a^2b^3$ ($a > 0$, $b > 0$) по основанию 10.

Решение: $\lg x = \lg 5 + 2\lg a + 3\lg b$.

Пример 2. Найти x по данному его логарифму: $\lg x = 5\lg a - 3\lg c$.

Решение: $\lg x = \lg a^5 - \lg c^3 = \lg\frac{a^5}{c^3}$.

Это действие называется *потенцированием*.

Пример 3. Упростить выражение:

$$\lg\frac{(m+n)^2}{a} + \lg\frac{ab}{m^2-n^2} + \lg\frac{m-n}{b}.$$

Решение: $\lg\frac{(m+n)^2}{a} + \lg\frac{ab}{m^2-n^2} + \lg\frac{m-n}{b} =$

$$= \lg\frac{(m+n)^2\cdot ab\cdot(m-n)}{a\cdot(m^2-n^2)\cdot b} =$$

$$= \lg\frac{(m+n)^2\cdot(m-n)}{(m-n)(m+n)} = \lg(m+n).$$

Ответ: $\lg(m+n)$.

1.4. Преобразования выражений

1.4.1. Преобразования выражений, включающих арифметические операции

Основные свойства арифметических операций

$$(a \pm b) \cdot c = ac \pm bc; \quad \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}; \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b};$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}; \quad 1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}.$$

Основные формулы сокращенного умножения

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2;$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

Пример 1. Упростить выражение: $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$.

Решение: $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b) \cdot (a+b)} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab} =$

$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab} = \frac{4ab(a^2 - b^2)}{ab(a^2 - b^2)} = 4.$

Ответ: 4.

Пример 2. Разложить на множители выражение: $(2n + 3)^2 - (n - 1)^2$.

Решение: $(2n + 3)^2 - (n - 1)^2 =$
$= (4n^2 + 12n + 9) - (n^2 - 2n + 1) =$
$= 4n^2 - n^2 + 12n + 2n + 9 - 1 = 3n^2 + 14n + 8.$

Ответ: $3n^2 + 14n + 8$.

1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

Пример 1. а) Представить в виде многочлена выражение:
$(16a^2 + 8ab + b^2) \cdot (4a + b)$.
Решение: $(4a + b) \cdot (16a^2 + 8ab + b^2) =$
$= (4a + b)(4a + b)^2 = (4a + b)^3$.
б) Разложить на множители выражение:
$64a^3 - (a - 1)^3$.
Решение: $64a^3 - (a - 1)^3 =$
$= (4a - (a - 1))(16a^2 + 4a(a - 1) + (a - 1)^2) =$
$= (3a + 1)(16a^2 + 4a^2 - 4a + a^2 - 2a + 1) =$
$= (3a + 1)(21a^2 - 6a + 1)$.
в) Доказать делимость выражения $321^3 - 123^3$ на 198.
Решение: $321^3 - 123^3 =$
$= (321 - 123)(321^2 + 321 \cdot 123 + 123^2) =$
$= 198 \cdot (321^2 + 321 \cdot 123 + 123^2)$
делится на 198, что и требовалось доказать.

Пример 2. Упростить выражение: $\dfrac{x^4-y^4}{x^2-y^2}-\dfrac{x^3+y^3}{x+y}$.
Решение:
$$\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}-\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2-y^2}-\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}=$$
$$=(x^2+y^2)-(x^2-xy+y^2)=xy.$$

Пример 3. Упростить выражение: $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}$.

Решение: $$\frac{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}{\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}=\frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2-\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^2}{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}=$$

$$=\frac{\left(x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}=x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}.$$

1.4.3. Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени

Вынесение множителя из-под знака корня

$\sqrt[n]{a^{n+m}}=a\cdot\sqrt[n]{a^m}$, где $a>0$	**Пример.** Вынести множитель из-под знака корня: а) $\sqrt[4]{3^7}$; б) $\sqrt[5]{a^{23}\cdot b^{17}}$. *Решение*: а) $\sqrt[4]{3^7}=\sqrt[4]{3^4\cdot 3^3}=3\sqrt[4]{3^3}=3\sqrt[4]{27}$; б) $\sqrt[5]{a^{23}\cdot b^{17}}=\sqrt[5]{a^{20}\cdot b^{15}\cdot a^3\cdot b^2}=$ $=\sqrt[5]{(a^4b^3)^5\cdot a^3b^2}=a^4b^3\cdot\sqrt[5]{a^3\cdot b^2}$

Внесение множителя под корень

$a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$, где $a>0$; $b>0$. Если $a<0$, то при нечетном n эта формула также верна, а при четном n: $a\cdot\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^n\cdot b}$	**Пример.** Внести множитель под корень: а) $2\sqrt[3]{5}$; б) $-\sqrt{2}\cdot a\sqrt{32b}$, $a<0$. *Решение*: а) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$; б) $-\sqrt{2}\cdot a\sqrt{32b}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{2}\cdot a\right)^2\cdot 32b}=\sqrt{64a^2b}$

Избавление подкоренного выражения от знаменателя

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b^k}} = \dfrac{\sqrt[n]{a \cdot b^{n-k}}}{b}$, где $a > 0$; $b > 0$	**Пример 1.** Избавиться от корня в знаменателе: $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$. *Решение*: $\sqrt{\dfrac{3}{5}} = \sqrt{\dfrac{3 \cdot 5}{5^2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Пример 2. Избавиться от иррациональности в знаменателе: $\dfrac{11}{2\left(5-\sqrt{3}\right)}$.

Решение: $\dfrac{11}{2\left(5-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{11 \cdot \left(5+\sqrt{3}\right)}{2 \cdot \left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)} =$

$= \dfrac{11 \cdot \left(5+\sqrt{3}\right)}{2 \cdot (25-3)} = \dfrac{11 \cdot \left(5+\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 22} = \dfrac{5+\sqrt{3}}{4}$.

1.4.4. Преобразования тригонометрических выражений

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Пример 1. Доказать тождество: $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Решение:

$$\frac{\sin\ \alpha+\sin\ \beta}{\cos\ \alpha+\cos\ \beta}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Преобразовать в произведение выражение: $\cos 25^\circ + \cos 35^\circ$.

Решение: $\cos 25^\circ+\cos 35^\circ=2\cos\dfrac{25^\circ+35^\circ}{2}\cdot\cos\dfrac{25^\circ-35^\circ}{2}=$

$$=2\cos 30^\circ\cdot\cos(-5^\circ)=2\cos 30^\circ\cdot\cos 5^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 5^\circ=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\cos 5^\circ.$$

Ответ: $\sqrt{3}\cdot\cos 5^\circ$.

Преобразование произведения тригонометрических функций

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

Пример 3. Вычислить: $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$.

Решение:

$$\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ=\sin 20^\circ\cdot\frac{\cos 40^\circ-\cos 120^\circ}{2}=$$

$$=\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 40^\circ-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\sin 20^\circ}{2}=\frac{2\sin 20^\circ\cdot\cos 40^\circ+\sin 20^\circ}{4}=$$

$$= \frac{-\sin 20^\circ + \sin 60^\circ + \sin 20^\circ}{4} = \frac{\sin 60^\circ}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

1.4.5. Преобразования выражений, включающих операцию логарифмирования

Переход к новому основанию

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$. В частности, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	**Пример.** Вычислить: $\log_4 3 \cdot \log_{27} 256$. *Решение*: $\log_4 3 \cdot \log_{27} 256 = \dfrac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \dfrac{\lg 256}{\lg 27} =$ $= \dfrac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \dfrac{\lg(4^4)}{\lg(3^3)} = \dfrac{\lg 3}{\lg 4} \cdot \dfrac{4\lg 4}{3\lg 3} = \dfrac{4}{3}$

Основное логарифмическое тождество

$a^{\log_a b} = b$	**Пример.** Вычислить: $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt[3]{5}} 3} + \frac{1}{3}\log_3 5}$. *Решение*: $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt[3]{5}} 3} + \frac{1}{3}\log_3 5} = 3^{2\log_3 \sqrt[3]{5} + \frac{1}{3}\log_3 5} =$ $= \left(3^{\log_3 \sqrt[3]{5}}\right)^2 \cdot \left(3^{\log_3 5}\right)^{\frac{1}{3}} =$ $= \left(\sqrt[3]{5}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{5} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$. *Ответ*: 5.

1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|5| = 5$; $|0| = 0$; $|-3| = 3$.

Основные свойства модуля

$|a| > 0$, если $a \neq 0$	
$|a \pm b| \leq |a| \pm |b|$	$|a \pm b| \geq \big||a| - |b|\big|$
$|ab| = |a| \cdot |b|$	$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$
$|a| = \sqrt{a^2}$	$|a^n| = |a|^n$

Геометрический смысл модуля: расстояние от 0 (начала координат) до точки a равно $|a|$, а расстояние между точками a и b равно $|a - b|$.

Применение: при построении графиков.

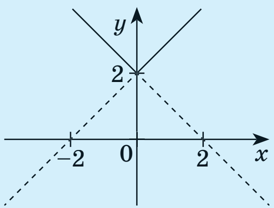


Рис. 1.3

Пример. Построить график функции $y = |x| + 2$.

Решение:

$$y = |x| + 2 = \begin{cases} y = x + 2, x \geq 0; \\ y = -x + 2, x < 0. \end{cases}$$

2 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

2.1. Уравнения

2.1.1. Квадратные уравнения

Квадратным называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Дискриминантом квадратного уравнения называется число $D = b^2 - 4ac$.

Корнем квадратного уравнения называется число x, обращающее уравнение в верное равенство.

Если $D < 0$, то действительных корней нет. Если $D \geq 0$, то корни находятся по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

При $D > 0$ два различных корня, при $D = 0$ корни совпадают (фактически корень один).

Пример 1. Решить уравнения: а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 - 6x + 9 = 0$; в) $2x^2 - 5x + 4 = 0$.

Решение: а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$. $D = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$.

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \dfrac{5 \pm 3}{4}$. $x_1 = 2$; $x_2 = 0{,}5$.

б) $x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$; $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3$.

в) $2x^2 - 5x + 4 = 0$; $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -7 < 0$. $x \in \varnothing$.

Ответ: а) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$; б) $x_{1,2} = 3$; в) действительных корней нет.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ b — четное, т. е. $b = 2k$, уравнение имеет вид $ax^2 + 2k \cdot x + c = 0$, то можно воспользоваться формулой:

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \text{ где } D = k^2 - ac.$$

Например, уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$ решить так: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3.$

Пример 2. Решить уравнение: $4x^2 + 4x - 15 = 0.$

Решение: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-2 \pm 8}{4};$

$x_1 = \frac{-2-8}{4} = -\frac{10}{4} = -2{,}5;$ $x_2 = \frac{-2+8}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5.$

Ответ: $x_1 = -2{,}5$; $x_2 = 1{,}5.$

2.1.2. Рациональные уравнения

Рациональным называется уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — рациональная функция, т. е. частное двух многочленов:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}.$$

При решении рациональных уравнений необходимо учитывать область допустимых значений (ОДЗ), т. е. область определения функции $f(x)$

Пример 1. Решить уравнение: $\frac{(x-1)^2 \cdot (x-2)}{(x-1) \cdot (x+3)^2} = 0.$

Решение: ОДЗ: $x \neq 1$; $x \neq -3$.

Дробь обращается в 0, если числитель обращается в 0: $(x - 1)^2 \cdot (x - 2) = 0.$

Поскольку $x = 1$ не входит в ОДЗ, окончательно получаем один корень: $x = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решить уравнение: $\frac{2x+3}{x^2-4x+4}-\frac{x-1}{x^2-2x}=\frac{5}{x}$.

Решение: ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Преобразуем уравнение:

$$\frac{2x+3}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{x(x-2)}=\frac{5}{x}.$$

Приведем обе части уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{(2x+3)\cdot x}{x\cdot(x-2)^2}-\frac{(x-1)(x-2)}{x\cdot(x-2)^2}=\frac{5\cdot(x-2)^2}{x\cdot(x-2)^2};$$

$2x^2 + 3x - x^2 + 3x - 2 = 5x^2 - 20x + 20;$

$0 = 4x^2 - 26x + 22;\ 2x^2 - 13x + 11 = 0;$

$$x_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{169-4\cdot2\cdot11}}{4}=\frac{13\pm\sqrt{169-88}}{4}=\frac{13\pm\sqrt{81}}{4};$$

$$x_1=\frac{13+9}{4}=\frac{22}{4}=\frac{11}{2}=5{,}5;\quad x_2=\frac{13-9}{4}=1.$$

Ответ: $x_1 = 5{,}5$; $x_2 = 1$.

2.1.3. Иррациональные уравнения

Иррациональным называется уравнение, которое содержит переменную (или рациональное выражение от переменной) под знаком корня.

При наличии корней четной степени необходимо учитывать область допустимых значений (ОДЗ). Для исключения посторонних корней делается проверка решений.

Основные методы решения иррациональных уравнений.

1. Разложение на множители.

Пример. Решить уравнение: $(x^2-3)\cdot\sqrt{5x-1}=0$.

Решение: ОДЗ: $5x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq\frac{1}{5}$.

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3=0; \\ 5x-1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}; \\ x=\frac{1}{5}. \end{array}\right.$$ $x=-\sqrt{3}$ не входит в ОДЗ.

Следовательно, уравнение имеет два корня:

$x_1=\sqrt{3}$; $x_2=\frac{1}{5}$.

Ответ: $x_1=\sqrt{3}$; $x_2=\frac{1}{5}$.

2. Замена переменной.

Пример. Решить уравнение:

$\sqrt{x^2+4x-1}+\sqrt{x^2+4x+20}=7$.

Решение: пусть $t=x^2+4x-1$. Тогда: $\sqrt{t}+\sqrt{t+21}=7$;

ОДЗ: $t>0$, $t>-21 \Rightarrow t>0$.

$\left(\sqrt{t+21}\right)^2=\left(7-\sqrt{t}\right)^2$; $t+21=49-14\sqrt{t}+t$;

$14\sqrt{t}-28=0$; $\sqrt{t}=2$; $t=4$.

$x^2+4x-1=4$; $x^2+4x-5=0$; $x_1=1$; $x_2=-5$.

Проверка: $\sqrt{1^2+4\cdot 1-1}+\sqrt{1^2+4\cdot 1+20}=2+5=7$;

$\sqrt{(-5)^2+4\cdot(-5)-1}+\sqrt{(-5)^2+4\cdot(-5)+20}=2+5=7$.

Ответ: $x_1=1$; $x_2=-5$.

3. Изоляция корня.

Этот метод использован в предыдущем примере (в уравнении $\sqrt{t}+\sqrt{t+21}=7$ один из радикалов перенесен в левую часть).

2.1.4. Тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$	$\cos x = a$
$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{ctg} x = a$

Уравнения $\sin x = a$; $\cos x = a$ имеют решения только при $|a| \le 1$:

$\sin x = a$	$x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

Уравнения $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$ имеют решения при любом a:

$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

Пример 1. Решить уравнения: а) $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

Решение: а) $2x+\dfrac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}+n\pi=$

$=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{3}+n\pi, n\in Z;$ $2x=-\dfrac{\pi}{3}+(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z;$

$x=((-1)^n-1)\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{2}, n\in Z;$

б) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi, n\in Z;$ $\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z;$ $x=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in Z.$

Ответ: а) $x=((-1)^n-1)\cdot\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{2}, n\in Z;$

б) $x=\dfrac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение: $\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1.$

Решение:

$2x-\frac{\pi}{3}=\operatorname{arcctg}1+n\pi, n\in Z;$ $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$

$2x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$ $2x=\frac{7\pi}{12}+\pi n, n\in Z;$

$x=\frac{7\pi}{24}+\frac{n\pi}{2}, n\in Z.$

Ответ: $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{n\pi}{2}, n\in Z.$

Сведение тригонометрических уравнений к простейшим

1. Замена переменной.

Пример. Решить уравнение: $\cos 2x + 2\sin^2 2x - 1 = 0.$

Решение: обозначим $t = \cos 2x$.

$\sin^2 2x = 1 - t^2$; $t + 2(1 - t^2) - 1 = 0;$

$2t^2 - t - 1 = 0;$ $t_1 = 1;$ $t_2 = -\frac{1}{2}.$

$\cos 2x = 1;$ $2x = 2n\pi,$ $n \in Z;$ $x = n\pi,$ $n \in Z;$

$\cos 2x=-\frac{1}{2};$ $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z;$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z.$

Ответ: $x_1 = n\pi,$ $n \in Z;$ $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z.$

2. Введение вспомогательного аргумента.

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi),$$

где $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$ $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Пример. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1.$

Решение: в данном случае $a = 1;$ $b = 1.$

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}};$ $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}};$ $\varphi=\frac{\pi}{4}.$

$$\sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1;\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n\in Z;$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$$

при n — четном, т. е. $n = 2k$, $k \in Z$ имеем

$$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+2\pi k=2\pi k,\ k\in Z;$$

при n — нечетном, т. е. $n = 2k + 1$ имеем корни уравнения

$$x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi=-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi,\ k\in Z.$$

Ответ: $2\pi k$, $k \in Z$; $-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi,\ k\in Z$.

3. Преобразование суммы (разности) тригонометрических функций в произведение и наоборот.

Пример. Решить уравнения: а) $\cos 3x-\cos 2x=\sin\frac{x}{2}$; б) $\sin 2x \sin 5x = \sin 3x \sin 4x$.

Решение: а) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$;

$$-2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{x}{2};\quad \left(1+2\sin\frac{5x}{2}\right)\cdot\sin\frac{x}{2}=0.$$

$$\sin\frac{5x}{2}=-\frac{1}{2};\quad \frac{5x}{2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+n\pi;$$

$$x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{15}+\frac{2n\pi}{5},\ n\in Z.\quad \sin\frac{x}{2}=0;\quad \frac{x}{2}=k\pi,\ k\in Z;$$

$$x=2k\pi,\ k\in Z.$$

Ответ: $x_1=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{15}+\frac{2n\pi}{5},\ n\in Z;\quad x_2=2k\pi,\ k\in Z.$

б) Преобразуем левую часть уравнения по формуле:

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\frac{1}{2}(\cos(2x-5x)-\cos(2x+5x))=\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos 7x).$$

Преобразуем правую часть уравнения по формуле:

$$\sin 3x\sin 4x=\frac{1}{2}(\cos(3x-4x)-\cos(3x+4x)=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 7x).$$

Получим уравнение в виде:

$\cos 3x - \cos 7x = \cos x - \cos 7x$; или: $\cos x - \cos 3x = 0$.

Используем формулу:

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};\ -2\sin x\sin 2x=0;$$

$\sin x \sin 2x = 0$.

$\sin x = 0$; $x = n\pi$, $n \in Z$; $\sin 2x = 0$; $x=\frac{k\pi}{2}, k\in \mathrm{Z}$.

Заметим, что $n\pi$ можно представить в виде $\frac{2k\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$, $k\in \mathrm{Z}$.

4. Применение формул понижения степени и двойного аргумента.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}.$$

Решение: применим формулу: $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2};$$

$$\frac{3}{2}-(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)=\frac{3}{2};$$

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0;$
$(\cos 2x + \cos 6x) + \cos 4x = 0.$
Используем формулу:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$2\cos 4x\cos 2x + \cos 4x = 0;$

$\cos 4x\cdot(2\cos 2x+1)=0;\ \cos 4x=0;\ 4x=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ n\in Z;$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z;\quad \cos 2x=-\frac{1}{2};\quad 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z;$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4},\ n\in Z;\quad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение: $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}.$
Решение:
$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x.$
Так как $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, то левая часть уравнения примет вид:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x;\quad 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{1}{2};$$

$\sin^2 2x = 1;\ \sin 2x = \pm 1;\ 2x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z;$

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$

5. Однородные тригонометрические уравнения.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin x - \cos x = 0.$
Решение: разделим обе части уравнения на $\cos x\neq 0$,
имеем: $\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}=0;\ \operatorname{tg} x - 1 = 0;\ \operatorname{tg} x = 1;$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Пример 2. Решить уравнение:

$2\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$

Решение: разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, имеем: $\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}=0.$

$2\,\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 3 = 0.$

Примем $\mathrm{tg}\, x = y$;

$2y^2 - y - 3 = 0;\ y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm 5}{4};$

$y_1=\frac{1-5}{4}=-1;\ \mathrm{tg}\, x=-1;\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$

$y_2=\frac{1+5}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2};\ \ \mathrm{tg}\, x=\frac{3}{2};\ \ x=\mathrm{arctg}\frac{3}{2}+\pi k, k\in Z.$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;\ \mathrm{arctg}\frac{3}{2}+\pi k, k\in Z.$

Заметим, что при решении однородных уравнений не всегда можно делить на $\cos^n x$.

Например, если в уравнении

$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x = 0$$

разделить обе части на $\cos^2 x$, то можно потерять множество решений $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Дело в том, что в этом уравнении $\cos x$ может быть равен нулю, поэтому данное уравнение надо решать разложением на множители: $\cos^2 x(a + b\,\mathrm{tg}\, x) = 0;$

$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=0;\\ a+b\,\mathrm{tg}\, x=0,\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\cos^2 x=0;\\ \mathrm{tg}\, x=-\frac{a}{b}\end{array}\right.$ и т. д.

2.1.5. Показательные уравнения

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида

$$a^x = b \ (a > 0;\ a \neq 1;\ b > 0).$$

Решение: $x = \log_a b$; $a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Более сложные показательные уравнения сводятся к простейшим.

Основными методами решения показательных уравнений являются:
а) метод уравнивания показателей степеней;
б) метод введения новой переменной

Пример 1. Решить уравнение: $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}$.

Решение: $2^x = 2^{1-2x}$; $x = 1 - 2x$; $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение: $4^x + 4^{x+2} = 136$.

Решение: $4^x + 4^2 \cdot 4^x = 136$; $17 \cdot 4^x = 136$; $4^x = 8$;

$2^{2x} = 2^3$; $2x = 3$; $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: 1,5.

Пример 3. Решить уравнение: $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$.

Решение: обозначим $t = 3^x$.

$t^2 - 10t + 9 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 9$.

$3^x = 1$; $x = 0$; $3^x = 9$; $x = 2$.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Пример 4. Решить уравнение: $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 6^x$.

Решение: $3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 5 \cdot 2^x \cdot 3^x$. Разделим обе части уравнения на $2^x \cdot 3^x$, имеем $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5$.

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, а $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{y}$; $3y + \frac{2}{y} = 5$;

$3y^2 - 5y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$;

$y_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$; $x = 1$;

$y_2 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$; $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$; $x = 0$.

Ответ: 1; 0.

2.1.6. Логарифмические уравнения

Простейшим логарифмическим уравнением называется уравнение вида

$$\log_a x = b \; (a > 0;\ a \neq 1).$$

Решение: $x = a^b$.

Более сложные логарифмические уравнения сводятся к простейшим.

Пример 1. Решить уравнение: $\log_3(9^x - 6) = x$.

Решение: $9^x - 6 = 3^x$. Обозначим: $t = 3^x$.

$t^2 - 6 = t$; $t^2 - t - 6 = 0$; $t_1 = -2$; $t_2 = 3$.

Уравнение $3^x = -2$ не имеет решений, т. к. $3^x > 0$;

$3^x = 3$; $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение:

$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 7) = 4$.

Решение: используем свойство логарифмов:

$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$.

ОДЗ: $x > -1$. $\log_2((x + 1)(x + 7)) = 4$; $x > -1$;

$\log_2(x^2 + 8x + 7) = 4$; $x^2 + 8x + 7 = 16$;

$x^2 + 8x - 9 = 0$; $x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16+9} = -4 \pm 5$;

$x_1 = -9$ — не удовлетворяет ОДЗ; $x_2 = 1$.
Ответ: 1.

Пример 3. Решить уравнение: $1 + \log_3 x = \log_x 9$.
Решение: ОДЗ: $x > 0$; $x \neq 1$. Используем формулу:
$\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$. $\log_x 9 = \dfrac{\log_3 9}{\log_3 x} = \dfrac{2}{\log_3 x}$.
Обозначим $t = \log_3 x$. $1 + t = \dfrac{2}{t}$; $t^2 + t - 2 = 0$;
$t_1 = 1$; $t_2 = -2$.
$\log_3 x = 1$; $x = 3$; $\log_3 x = -2$; $x = \dfrac{1}{9}$.
Ответ: $\dfrac{1}{9}$; 3.

Пример 4. Решить уравнение: $x^{\log_2 x} = 16$.
Решение: ОДЗ: $x > 0$. $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$.
Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2: $\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 16$; $\log_2 x = \pm 4$;
$x_1 = 16$; $x_2 = \dfrac{1}{16}$.
Ответ: $x_1 = 16$; $x_2 = \dfrac{1}{16}$.

2.1.7. Равносильность уравнений, систем уравнений

Равносильными называются уравнения (системы), множества решений которых совпадают.

Пишут: $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.
Например: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$;
$2x^2 - 2x = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2$.

Уравнения $x + \sqrt{x} = -1 + \sqrt{x}$ и $x = -1$ неравносильны (у первого корней нет, у второго — $x = -1$).

Равносильность уравнений обозначается знаком $\Leftrightarrow$

2.1.8. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными

Систему уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x; y) = g_1(x; y); \\ f_2(x; y) = g_2(x; y). \end{cases}$$

Система называется *линейной*, если она имеет вид:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

2.1.9. Основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных

1. Метод подстановки. Из одного уравнения выражают одну переменную через другую и подставляют в другое уравнение.

2. Метод алгебраического сложения. В этом случае уравнения умножают на числа (выражения), отличные от 0, так, чтобы при сложении полученных уравнений получилось уравнение с одной переменной.

Пример. Решить систему уравнений двумя способами: $\begin{cases} 2x + 3y = 12; \\ 5x - 7y = 1. \end{cases}$

Решение:

I способ (*метод подстановки*).

Из первого уравнения:

$y = \dfrac{12-2x}{3}$; $5x - \dfrac{7\cdot(12-2x)}{3} = 1$; $\dfrac{29x-84}{3} = 1$;

$29x - 84 = 3$; $29x = 87$; $x = 3$. $y = \dfrac{12-2\cdot 3}{3} = 2$.

Ответ: (3; 2).

II способ (*метод алгебраического сложения*).
Умножаем первое уравнение на 5, а второе — на -2 и сложим:

$$+\begin{cases}10x+15y=60;\\ -10x+14y=-2,\end{cases}$$
$$29y = 58;$$

$y = 2$; $2x + 3 \cdot 2 = 12$; $2x = 6$; $x = 3$.

Ответ: (3; 2).

3. Введение новых переменных.

Пример. Решить систему уравнений: $\begin{cases}x-y=16;\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8.\end{cases}$

Решение: обозначим $u=\sqrt{x}$; $v=\sqrt{y}$.

$\begin{cases}u^2-v^2=16,\\ u+v=8;\end{cases}$ $\begin{cases}(u-v)(u+v)=16,\\ u+v=8;\end{cases}$ $\begin{cases}8(u-v)=16,\\ u+v=8;\end{cases}$

$$+\begin{cases}u-v=2;\\ u+v=8,\end{cases}$$
$$2u = 10;$$

$u = 5$; $v = 3$. $x = 25$; $y = 9$.

Ответ: (25; 9).

2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений

Пример 1. Решить уравнение:
$\cos x + 2\cos 4x = 3$.
Решение: используем свойство:
$\cos x \le 1$; $2\cos 4x \le 2$.

Поэтому $\cos x + 2\cos 4x = 3$ возможно лишь в случае: $\begin{cases}\cos x = 1,\\ \cos 4x = 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x = 2n\pi, n \in Z,\\ x = \dfrac{k\pi}{2}, k \in Z.\end{cases}$

Число $2n\pi$ можно представить в виде $\dfrac{4n\pi}{2}$. $x = 2n\pi, n \in Z.$

Ответ: $x = 2n\pi, n \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение: $x^3 + x - 2 = 0.$
Решение: очевидно, что функция $f(x) = x^3 + x - 2$ монотонно возрастает на всей оси и потому обращается в 0 не более одного раза.
При этом $f(1) = 1^3 + 1 - 2 = 0.$
Значит, $x = 1$ — единственный корень.
Ответ: $x = 1.$

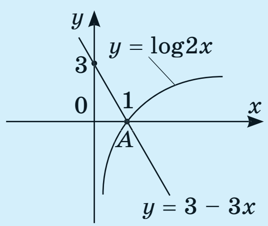


Рис. 2.1

Пример 3. Решить уравнение: $\log_2 x = 3 - 3x.$
Решение: строим графики $y = \log_2 x$; $y = 3 - 3x.$ Они пересекаются в одной точке $A(1; 0).$ Значит, $x = 1$ — единственный корень.
Ответ: $x = 1.$

2.1.11. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем

Для графического решения системы нужно построить на координатной плоскости графики обоих уравнений системы и найти координаты их общих точек.

Пример. Решить графически систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25; \\ xy=12. \end{cases}$$

Решение: построим график уравнения $x^2+y^2=25$ (это окружность радиуса 5 с центром в начале координат) и график уравнения $xy=12$ (это гипербола). Они пересекаются в точках (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3).

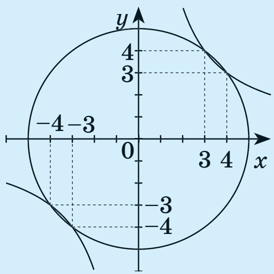


Рис. 2.2

2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учет реальных ограничений

При решении текстовой задачи необходимо составить ее математическую модель, т. е. записать условие задачи в виде уравнения или системы уравнений и учесть реальные ограничения (например, скорость, время и т. д. не могут быть отрицательными).

Пример. Поезд прошел 400 км. Пройдя половину пути с постоянной скоростью, он был задержан на семафоре на 30 мин, после чего увеличил скорость на 20 км/ч и прибыл на конечную станцию через 5 ч после отправления. С какой скоростью поезд прошел вторую половину пути?

Решение: пусть вторую половину пути поезд ехал со скоростью x км/ч. Тогда первую половину пути он ехал со скоростью $(x - 20)$ км/ч. Поэтому первую половину пути (200 км) поезд прошел за $\frac{200}{x-20}$ ч, а вторую половину пути — за $\frac{200}{x}$ ч. Учитывая $\frac{1}{2}$ ч задержки, получаем:

$$\frac{200}{x-20}+\frac{1}{2}+\frac{200}{x}=5; \quad \frac{200}{x-20}+\frac{200}{x}-\frac{9}{2}=0;$$

$$\frac{400x+400(x-2)-9x(x-20)}{2x(x-20)}=0;$$

$$9x^2 - 980x + 8000 = 0 \ (x \neq 0,\ x \neq 20);$$

$$x_1 = 100;\ x_2 = 8\frac{8}{9}.$$

Учтем реальное ограничение $x > 20$ (первую половину пути поезд шел со скоростью $(x - 20)$ км/ч, т. е. $x - 20 > 0$). Значит, $x = 100$.

Ответ: 100 км/ч.

2.2. Неравенства

2.2.1. Квадратные неравенства

Квадратным неравенством называется неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0$$

(вместо знака «>» могут быть знаки «≥», «<», «≤»), где $a \neq 0$.

Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, существующие, если $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$

$a > 0,\ D > 0$	$x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$
$a > 0,\ D = 0$	$x \in \left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right) \cup \left(-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$
$a > 0,\ D < 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$

Решение неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$

$a > 0,\ D > 0$	$x \in (-\infty;\ x_2] \cup [x_2;\ +\infty)$
$a > 0,\ D \leq 0$	$x \in (-\infty;\ +\infty)$

Решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$

$a > 0,\ D > 0$	$x \in (x_1;\ x_2)$
$a > 0,\ D \leq 0$	Ответов нет

Решение неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$

$a > 0,\ D > 0$	$x \in [x_1;\ x_2]$
$a > 0,\ D = 0$	$x = -\dfrac{b}{2a}$
$a > 0,\ D < 0$	Ответов нет
Если $a < 0$, то умножением неравенства на -1 сводим его к случаю $a > 0$	

Пример. Решить неравенства:
а) $x^2 + 4x + 3 \leq 0$; б) $-x^2 + 4x - 5 < 0$.
Решение: а) $x^2 + 4x + 3 = 0$; $x_1 = -3$; $x_2 = -1$;
$a > 0,\ D > 0,\ x \in [-3;\ -1]$.
б) $x^2 - 4x + 5 > 0$; $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 < 0$; $x \in (-\infty;\ +\infty)$.
Ответ: а) $x \in [-3;\ -1]$; б) $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2.2.2. Рациональные неравенства

Рациональным неравенством называется неравенство вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены (вместо знака «>» может быть знак «≥», «<», «≤»).

Методы решения рациональных неравенств

1. Метод интервалов.

Пусть требуется решить неравенство

$$\frac{(x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot\ldots\cdot(x-b_m)} > 0\ (\geq 0; < 0; \leq 0),$$

где числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ попарно различны.

Нанесем на действительную ось точки $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Эти точки разбивают ось на интервалы. На каждом интервале левая часть неравенства сохраняет знак. Поэтому для решения неравенства нужно взять объединение всех интервалов, на которых левая часть имеет соответствующий знак. Для этого достаточно проверить знак в одной точке одного интервала и учесть, что на соседних знаках знаки противоположны.

Аналогично решаются неравенства вида $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) > 0$ (≥ 0, < 0, ≤ 0), где $a_1, \ldots, a_n$ попарно различны (на ось наносятся точки $a_1, \ldots, a_n$).

Пример 1. Решить неравенство:
$(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (9x + 3) < 0$.

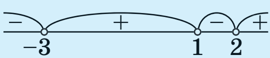


Рис. 2.3

Решение: наносим на ось точки $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

При $x = 0$: $(x - 2) \cdot (x - 1) \cdot (9x + 3) > 0$.

С учетом этого расставляем знаки.

Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 2)$.

Пример 2. Решить неравенство: $\dfrac{(x+1)(x-4)}{(x-2)(x+3)} \le 0.$

Решение: наносим на ось точки: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

При $x = 0$:

$$\frac{(x+1)(x-4)}{(x-2)(x+3)} > 0.$$

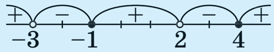


Рис. 2.4

С учетом этого и ОДЗ $x \ne -3$, $x \ne 2$, расставляем знаки.

Ответ: $(-3; -1] \cup (2; 4]$.

2. Обобщенный метод интервалов.

Если требуется решить неравенство

$$\frac{(x-a_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-b_p)^{m_p}} > 0 \; (\ge 0; < 0; \le 0),$$

где $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_p$ попарно различны; $n_1, \ldots, n_k$, $m_1, \ldots, m_p$ — произвольные натуральные числа, то метод интервалов применяем со следующей оговоркой: при переходе через точку a_i (b_j) меняем знак, если число n_i (m_j) нечетно, и сохраняем знак, если четно.

Пример. Решить неравенство:

$$\frac{x^2(x-3)^3 \cdot (x+1)^4}{(x-2)^5 \cdot (x-4)} \ge 0.$$

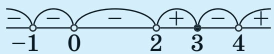


Рис. 2.5

Решение: при переходе через точки -1; 0 знак не меняется; при переходе через точки 2; 3; 4 знак меняется.

Ответ: $(2; 3] \cup (4; +\infty)$.

2.2.3. Показательные неравенства

Показательное неравенство содержит переменную (или выражение с переменной) в показателе степени.

Решение неравенства $a^x > b$ ($a \geq 0$, $a \neq 1$)

$b \leq 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$b > 0$	$x > \log_a b$ при $a > 1$; $x < \log_a b$ при $0 < a < 1$

Аналогично решаются неравенства с другими знаками.

Пример 1. Решить неравенства: а) $3^x > \dfrac{1}{27}$; б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 8$.

Решение: а) $x > \log_2 \dfrac{1}{27}$; $x > -3$, (или $3^x > 3^{-3}$; $x > -3$);

б) $x \leq \log_{\frac{1}{2}} 8$; $x \leq -3$, (или $2^{-x} \geq 2^3$; $-x \geq 3$; $x \leq -3$).

Ответ: а) $(-3; +\infty)$; б) $(-\infty; -3)$.

Решение неравенств вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

При $a > 1$	$f(x) > g(x)$
При $a < 1$	$f(x) < g(x)$

Аналогично решаются неравенства с другими знаками.

Пример 2. Решить неравенство: $3^{-x} < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2}$.

Решение:

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2}$; $x > x^2$;

$x^2 - x < 0$; $x(x-1) < 0$.

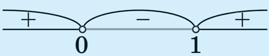


Рис. 2.6

Ответ: $(0; 1)$.

2.2.4. Логарифмические неравенства

Логарифмическими называют неравенства, которые содержат переменную под знаком логарифма или в его основании.

Решение неравенства $\log_a x > b$ $(a > 0;\ a \neq 1)$

При $a > 1$	$x > a^b$
При $a < 1$	$0 < x < a^b$

Аналогично решаются неравенства с другими знаками.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $\log_2 x < 3$; б) $\log_{\frac{1}{2}} x \leq -5$.

Решение:

а) $0 < x < 2^3$; $0 < x < 8$. б) $x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$; $x \geq 2^5$; $x \geq 32$.

Ответ: а) $(0;\ 8)$; б) $[32;\ +\infty)$.

Решение неравенств вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

При $a > 1$	$f(x) > g(x) > 0$
При $0 < a < 1$	$0 < f(x) < g(x)$

Аналогично решаются неравенства с другими знаками.

Пример 2. Решить неравенство: $\log_2 x \geq \log_4(x + 2)$.

Решение: ОДЗ: $x > 0$.

$\log_2 x = \log_4(x^2)$;

$\log_4(x^2) \geq \log_4(x + 2)$;

$\begin{cases} x^2 \geq x + 2; \\ x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0; \\ x > 0. \end{cases}$

$(x - 2)(x + 1) \geq 0$; $x \in [2;\ +\infty)$.

Ответ: $[2;\ +\infty)$.

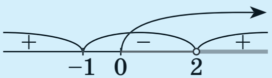


Рис. 2.7

Пример 3. Решить неравенство: $\log_{0,5}(2x+3)>0$.
Решение: $0<2x+3<1$; $-3<2x<-2$; $-1,5<x<-1$.
Ответ: $(-1,5;\ -1)$.

Пример 4. Решить неравенство: $\log_3^2 x+3\log_3 x+2<0$.

Рис. 2.8

Решение: ОДЗ: $x>0$.
Пусть $\log_3 x=t$;
$t^2+3t+2<0$;
$(t+2)(t+1)<0$;
$-2<t<-1$;
$-2<\log_3 x<-1$; $3^{-2}<x<3^{-1}$; $\frac{1}{9}<x<\frac{1}{3}$.
Ответ: $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)$.

2.2.5. Системы линейных неравенств

Решением системы линейных неравенств является пересечение решений всех неравенств, входящих в систему.

Пример. Решить систему неравенств:
$$\begin{cases}2<3x-5<7;\\-4\le 3-x\le 2x+5.\end{cases}$$
Решение: перепишем систему в виде:
$$\begin{cases}3x-5>2;\\3x-5<7;\\3-x\ge -4;\\3-x\le 2x+5.\end{cases}\quad \begin{cases}3x-7>0;\\3x-12<0;\\7-x\ge 0;\\-3x-2\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>\frac{7}{3};\\x<4;\\x\le 7;\\x\ge -\frac{2}{3}.\end{cases}$$
$$x\in\left(\frac{7}{3};+\infty\right)\cap(-\infty;4)\cap(-\infty;7]\cap\left[-\frac{2}{3};+\infty\right);\quad x\in\left(2\frac{1}{3};4\right).$$
Ответ: $\left(2\frac{1}{3};4\right)$.

2

2.2.6. Системы неравенств с одной переменной

Решением системы неравенств с одной переменной является пересечение решений всех неравенств, входящих в систему.

Пример. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \geq \dfrac{1}{x}; \\ \dfrac{x+3}{x+2} > 1. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} \geq 0; \\ \dfrac{x+3}{x+2} - 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{1-x}{x^2} \geq 0; \\ \dfrac{1}{x+2} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]; \\ x \in (-2; +\infty); \end{cases}$$

$x \in (-2;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

Ответ: $(-2;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

2.2.7. Равносильность неравенств, систем неравенств

Равносильные неравенства (системы) — это неравенства (системы), множества решений которых совпадают.

Равносильность неравенств (систем) обозначается знаком $\Leftrightarrow$

Например: $\begin{cases} x - 1 \leq 2x - 3; \\ 2x + 3 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2 \leq 0; \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0; \\ 2x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2; \\ x > -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств

Пример 1. Решить неравенство:
$2^{\sin^2 x} \leq \cos x$.

Решение:
$\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow 2^{\sin^2 x} \geq 1$; $\cos x \leq 1$;
$2^{\sin^2 x} \leq \cos x \Leftrightarrow \sin^2 x = 0$; $\cos x = 1$.
$\cos x = 1$; $x = 2n\pi$, $n \in Z$.
Ответ: $x = 2n\pi$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить неравенство: $x^3 + x \geq 2$.
Решение: функция $f(x) = x^3 + x$ монотонно возрастает на всей оси, причем $f(1) = 2$.
Значит, $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Ответ: $[1; +\infty)$.

Для *графического решения неравенства* $f(x) > g(x)$ (вместо знака «>» может быть знак «≥», «<», «≤») следует на одной координатной плоскости изобразить графики функций $f(x)$, $g(x)$ и определить те значения x, при которых выполняется неравенство.

Пример 3. Решить неравенство: $2^{|x|} < x^2$.
Решение: построим графики $y = 2^{|x|}$, $y = x^2$.
График $y = 2^{|x|}$ лежит ниже графика $y = x^2$ при $-4 < x < -2$ и при $2 < x < 4$.
Ответ: $(-4; -2) \cup (2; 4)$.

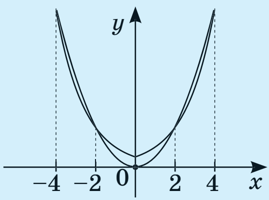


Рис. 2.6

Пример 4. Решить неравенство: $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Решение: построим графики $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$.

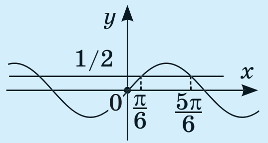


Рис. 2.7

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right], n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2n\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$.

2.2.9. Метод интервалов

Метод интервалов используется для решения неравенств вида $f(x) > (\geq; <; \leq)\ 0$, где $f(x)$ — элементарная функция.

Для *решения неравенства методом интервалов* следует отметить на ОДЗ точки, в которых функция $f(x)$ обращается в 0. Они разбивают ОДЗ на интервалы, на каждом из которых функция $f(x)$ сохраняет знак. Выбрав на каждом интервале одну точку, определяем знак $f(x)$ на каждом интервале и берем объединение интервалов, соответствующих нужному знаку.

Пример. Решить неравенство:

$\sin x \leq \sin 2x$.

Решение:

$\sin x - \sin 2x \leq 0$;

$\sin x - 2 \sin x \cos x \leq 0$;

$\sin x \cdot (1 - 2 \cos x) \leq 0$.

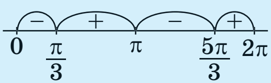


Рис. 2.8

Функция $f(x) = \sin x - \sin 2x$ — периодическая с периодом 2π. Найдем все ее корни на промежутке $[0;\ 2\pi)$: $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0;\\ 1-2\cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0;\\ 1-2\cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$x_1 = 0;\quad x_2 = \frac{\pi}{3};\quad x_3 = \pi;\quad x_4 = \frac{5\pi}{3}.\quad x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi;\frac{5\pi}{3}\right].$$

Прибавляем период $2\pi n$, $n \in Z$:

$$x \in \left[2n\pi;\frac{\pi}{3}+2n\pi\right] \cup \left[\pi+2n\pi;\frac{5\pi}{3}+2n\pi\right], n \in \mathrm{Z}.$$

Ответ: $x \in \left[2n\pi;\frac{\pi}{3}+2n\pi\right] \cup \left[\pi+2n\pi;\frac{5\pi}{3}+2n\pi\right], n \in \mathrm{Z}.$

2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

Для *графического решения системы неравенств* с двумя переменными следует на одной координатной плоскости изобразить множество решений каждого из неравенств системы и взять их пересечение.

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости решение системы: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1;\\ x + y \ge 1.\end{cases}$

Решение: изобразим на координатной плоскости графики уравнений $x^2 + y^2 = 1$ (единичная окружность с центром в начале координат) и $x + y = 1$ (прямая, проходящая через точки $(0;\ 1)$ и $(1;\ 0)$). Каждый из этих графиков разбивает плоскость на две части.

Неравенству $x^2 + y^2 = 1$ соответствует круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (точка (0; 0) удовлетворяет неравенству).

Неравенству $x + y \geq 1$ соответствует часть плоскости над прямой $x + y = 1$ (точка (0; 0) не удовлетворяет неравенству).

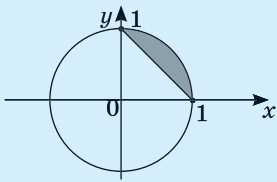


Рис. 2.9

Решение системы (пересечение множеств решений неравенств) закрашено на рис. 2.9.

Пример 2. Решить неравенство: $|2x - y| - x < 3$.

Решение:

$|2x - y| < 3 + x$; $\begin{cases} 2x - y < x + 3; \\ 2x - y > -x - 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y > x - 3; \\ y < 3x + 3; \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 3 < y < 3(x + 1); \\ x - 3 < 3(x + 1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 < y < 3(x + 1); \\ x > -3. \end{cases}$$

Геометрическим решением данной системы неравенств является множество точек, расположенных внутри угла ABC:

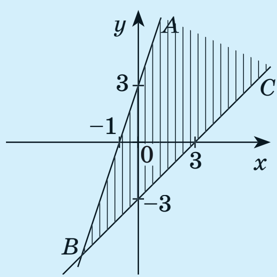


Рис. 2.10

$$\begin{cases} x > -3; \\ (x - 3) < y < 3(x + 1). \end{cases}$$

Ответ: $(-3; +\infty)$; $x - 3 < y < 3(x + 1)$.

3 ФУНКЦИИ

3.1. Определение и график функции

3.1.1. Функция, область определения функции

Величина y называется **функцией** величины x, если каждому значению x из некоторого числового множества соответствует единственное значение величины y.

Область определения функции — множество значений независимой переменной x, при которых функция имеет смысл.

Величина x называется *аргументом*: $y = f(x)$.
Область определения функции $y = f(x)$ обозначают $D(f)$ или $D(y)$

Пример 1. Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt{3x-2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2-1}$.

Решение: а) $3x - 2 \geq 0$; $x \geq \dfrac{2}{3}$. $D(y)=\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

б) $\begin{cases} x+3\geq 0; \\ x^2-1\neq 0; \end{cases}$ $x \geq -3$; $x \neq \pm 1$.

$D(y) = [-3; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: а) $\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$; б) $[-3; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. Найти область определения функции:

$$y=\frac{1}{\sin x+1}.$$

Решение: $\sin x + 1 \neq 0$, тогда $\sin x \neq -1$,

т. е. $x \neq -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $x \neq -\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$.

3.1.2. Множество значений функции

Множеством значений функции $y = f(x)$ называют все значения, которые принимает функция на области ее определения $D(f)$.

Множество значений функции $y = f(x)$ обозначают $E(f)$ или $E(y)$

Пример. Найти множество значений функции:

$$y=\frac{1}{x^2+1}.$$

Решение: $x^2=\frac{1}{y}-1$; $x=\pm\sqrt{\frac{1}{y}-1}$; $\frac{1}{y}-1\geq 0$;

$0 < y \leq 1$.

Ответ: $E(y) = (0; 1]$.

3.1.3. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях

Графиком функции называется множество точек на координатной плоскости, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты — соответствующими значениями функции y.

Для того чтобы кривая была графиком некоторой функции, необходимо и достаточно, чтобы каждая вертикальная прямая пересекала ее не более одного раза.

Так, кривая, изображенная на рис. 3.1, *а*, определяет функцию, а на рис. 3.1, *б* — не определяет.

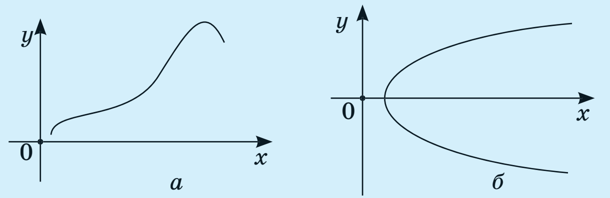


Рис. 3.1

Графический способ задания функций используют при описании реальных процессов. В частности, о величине и характере изменения характеристик физической системы (напряжения, силы тока и т. д.) делают выводы, наблюдая за графиками этих характеристик (как функций времени) на экранах приборов.

3.1.4. Обратная функция. График обратной функции

Если функция $f(x)$ принимает каждое свое значение только один раз, то величину x можно представить как функцию величины y: $x = \varphi(y)$. Эта функция называется **обратной** для функции $f(x)$.

Область определения обратной функции совпадает с множеством значений исходной функции, а множество значений — с областью определения исходной функции.

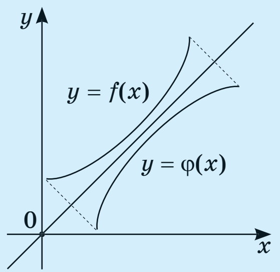


Рис. 3.2

При записи обратной функции обычно меняют местами аргумент и функцию, т. е. в качестве обратной к $y = f(x)$ рассматривается функция $y = \varphi(x)$.

Пример. Определить обратную функцию для функции: а) $y = x^2$, $D(y) = [0; +\infty)$; б) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty; 0]$; в) $y = 3x + 1$.

Решение: а) поскольку $x \geq 0$: $x = \sqrt{y}$; $y = \sqrt{x}$;

б) поскольку $x \leq 0$: $x = -\sqrt{y}$; $y = -\sqrt{x}$;

в) $x = \dfrac{y-1}{3}$; $y = \dfrac{x-1}{3}$.

Ответ: а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = -\sqrt{x}$; в) $y = \dfrac{x-1}{3}$.

Для построения графика обратной функции нужно отразить график $y = f(x)$ симметрично относительно прямой $y = x$.

3.1.5. Преобразования графиков, параллельный перенос, симметрия относительно осей координат

Пусть дан график функции $y = f(x)$. Стандартными преобразованиями из этого графика можно получить графики таких функций:

$$y = f(x) + a; \quad y = f(x + a);$$
$$y = kf(x); \quad y = f(kx);$$
$$y = f(|x|); \quad y = |f(x)|,$$

где a и k — действительные числа; $a \neq 0$, $k \neq 0$, $k \neq 1$.

1. Для построения графика функции $y = f(x) + a$ необходимо перенести график $y = f(x)$ параллельно оси Oy на a единиц (при $a > 0$ — вверх, при $a < 0$ — вниз) (рис. 3.3).

2. Для построения графика $y = f(x + a)$ необходимо перенести график $y = f(x)$ на $(-a)$ единиц параллельно оси Ox (рис. 3.4).

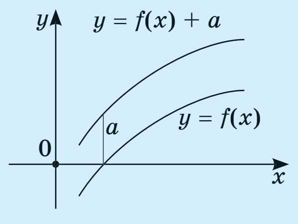


Рис. 3.3

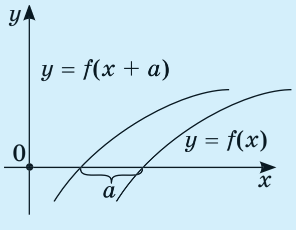


Рис. 3.4

3. Для получения графика $y = kf(x)$ при $k > 0$ необходимо произвести растяжение графика от оси абсцисс в k раз при $k > 1$, сжатие к оси абсцисс в $\frac{1}{k}$ раз при $0 < k < 1$. Если $k < 0$, то сначала строится график функции $y = -kf(x)$, который затем зеркально отражается относительно оси Ox (рис. 3.5, *а*, *б*, *в*).

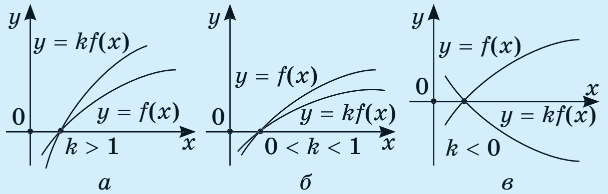


Рис. 3.5

4. Для получения графика $y = f(kx)$ при $k > 0$ необходимо произвести сжатие графика $y = f(x)$ в k раз к оси Oy при $k > 1$, растяжение в $\dfrac{1}{k}$ раз от оси Oy при $0 < k < 1$. Если $k < 0$, то строится график $y = f(-kx)$, который затем зеркально отражается относительно оси Oy (рис. 3.6, *а*, *б*, *в*).

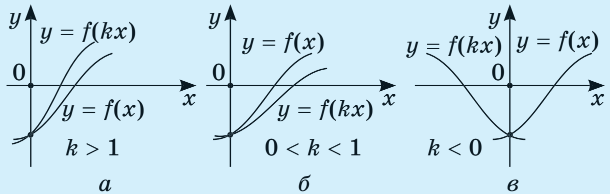
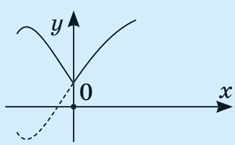


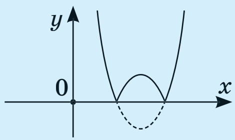
Рис. 3.6

5. Для получения графика $y = f(|x|)$ необходимо построить график функции $y = f(x)$ при $x \geq 0$, а затем отразить его симметрично относительно оси Oy (рис. 3.7).



Пунктир — часть графика $y = f(x)$ при $x < 0$

Рис. 3.7



Пунктир — часть графика $y = f(x)$ при $y < 0$

Рис. 3.8

6. Для получения графика функции $y = |f(x)|$ необходимо построить график $y = f(x)$, а затем все его точки, лежащие ниже оси Ox, отразить симметрично относительно оси Ox (рис. 3.8).

3.2. Элементарное исследование функций

3.2.1. Монотонность функций. Промежутки возрастания и убывания

Монотонная функция — это функция, приращение которой не меняет знака, то есть либо всегда неотрицательное, либо всегда неположительное.

Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на промежутке, если для любых двух точек x_1, x_2 этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Пример. Указать промежутки монотонности функции, график которой изображен на рис. 3.9.

Решение: промежутки убывания: $(-\infty; -2)$; $(1; 3)$.

Промежутки возрастания: $[-2; 1]$; $[3; +\infty)$.

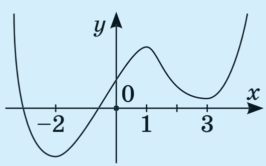


Рис. 3.9

3

3.2.2. Четность и нечетность функций

Функция $y = f(x)$ называется **четной (нечетной)**, если для каждого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$.

Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется **функцией общего вида**

Пример. Исследовать на четность функции:
а) $y = \cos 2x$; б) $y = x^3$; в) $y = 2^x$.
Решение: а) $\cos(2 \cdot (-x)) = \cos 2x$ — четная;
б) $(-x)^3 = -x^3$ — нечетная;
в) $2^{-x} \neq 2^x$; $2^{-x} \neq -2^x$ — общего вида.
Ответ: а) четная; б) нечетная; в) общего вида.
Функции $y = \sin x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетные.

3.2.3. Периодичность функций

Функция $f(x)$ называется **периодической** с периодом T, где число $T > 0$, если для каждого $x \in D(f)$ верно равенство $f(x + T) = f(x)$.

Например, наименьший период для функций $\sin x$, $\cos x$ равен 2π, для функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ он равен π:

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$;
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$;
$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$;
$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.

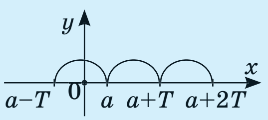


Рис. 3.10

График периодической функции с периодом T строится так: построив график на каком-либо промежутке $[a; a + T)$, далее переносят его параллельно на T; $2T$; $3T$; ... единиц вправо и влево вдоль оси Ox.

Пример 1. Определить наименьший положительный период функции $y = \sin(kx + b)$, где k, b — числа.

Решение: пусть $T > 0$ — искомый период, тогда по определению периодической функции:

$\sin(k(x + T) + b) = \sin(kx + b)$,

или $\sin(kx + kT + b) = \sin(kx + b)$.

Обозначим $x_1 = kx + b$ и подставим значение x_1 вместо $kx + b$ в последнее равенство. Получим $\sin(x_1 + kT) = \sin x_1$. Так как наименьшим положительным периодом синуса является 2π, то $|k| \cdot T = 2\pi$, откуда $T = \frac{2\pi}{|k|}$.

Делаем вывод: для функции $y = \sin 2x$ наименьшим положительным периодом является число $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ответ: $T = \pi$.

Пример 2. Для функции $y = \sin\frac{1}{2}x$ период

$T = 2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$ $\left(\text{для функции } y = \sin kx\text{: } T = \frac{2\pi}{|k|}\right)$.

Пример 3. Найти период для функции:

$y = \sin 2x + \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Решение: 1) $\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi))$ с периодом $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x + 2\pi}{2}\right)$ — период $T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$.

3) Период данной функции — это (НОК) периодов слагаемых, т. е. искомый период $T = 2\pi$.

Ответ: 2π.

3.2.4. Ограниченность функций

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной сверху (снизу)** на множестве $X \subset D(f)$, если существует такое число C, что $f(x) \le C$ ($f(x) \ge C$) для каждого $x \in X$.

Функция называется *ограниченной на множестве*, если она ограничена на нем и сверху, и снизу.

Например, функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \frac{1}{x^2+1}$ ограничены на всей оси; функция $y = x^2$ ограничена снизу ($y \ge 0$) на всей оси, но не является ограниченной сверху, а значит, она неограниченна.

3.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции

Точка x_0 называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точка называется *точкой локального экстремума* функции, если она является точкой локального максимума или минимума.

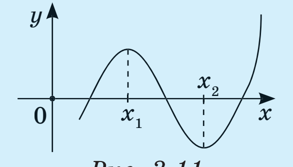


Рис. 3.11

На рис. 3.11 точка x_1 — точка локального максимума, а точка x_2 — точка локального минимума.

Ранее было сформулировано *правило возрастания функции*: если при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $y = f(x)$ — возрастающая; если при $x_1 < x_2$ $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $y = f(x)$ — убывающая.

Рассмотрим рис. 3.11. Слева от локального max x_1 функция возрастает, а справа — убывает; а точку локального min x_2 окружают слева — промежуток убывания, а справа — промежуток возрастания функции. Такое популярное объяснение, как правило, лучше запоминается.

3.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, т. е. ее график представляет собой сплошную линию, то она достигает на этом отрезке своих *наибольшего* и *наименьшего* значений. Такие значения могут достигаться или в точках локального экстремума, или в граничных точках отрезка $[a; b]$.

Например, на рис. 3.12 наибольшее значение достигается в точке b, а наименьшее — в точке x_0.

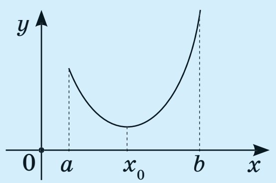


Рис. 3.12

На рис. 3.13, *а* на промежутке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение в точке b; наименьшее значение — в точке a; x_1 — точка max; x_2 — точка min.

На рис. 3.13, *б* на промежутке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение в точке x_1, наименьшее значение — в точке x_2; в то же время x_1 — локальный max, x_2 — локальный min функции.

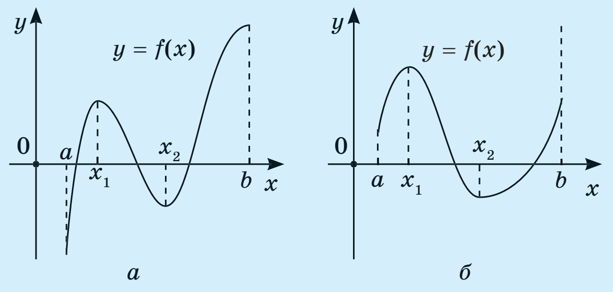


Рис. 3.13

3.3. Основные элементарные функции

3.3.1. Линейная функция, ее график

Функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые фиксированные числа, называется **линейной**.

Если $k > 0$, то функция монотонно возрастает, если $k < 0$ — убывает, если $k = 0$ — постоянная.

Графиком линейной функции является прямая линия. Построение графика производится по двум точкам

Пример. Построить графики:

а) $y = 2x + 3$;

б) $y = -3x + 1$.

Решение:

а) $y(0) = 3$; $y(1) = 5$. График проходит через точки (0; 3), (1; 5) (рис. 3.14).

б) $y(0) = 1$; $y(1) = -2$. График проходит через точки (0; 1), (1; −2) (рис. 3.15).

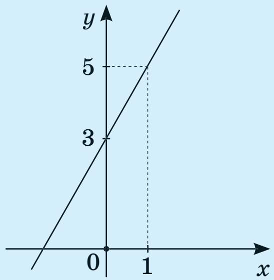


Рис. 3.14

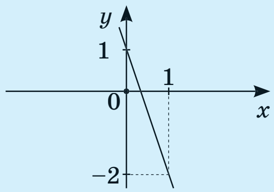


Рис. 3.15

Для построения прямой линии удобно брать две точки на осях координат: $A(0; b)$; $B\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$ (для прямой $y = kx + b$)

3.3.2. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, ее график

Функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называется **обратной пропорциональной зависимостью**.

Функция нечетна, возрастает при $k < 0$ (рис. 3.16, *б*) и убывает при $k > 0$ (рис. 3.16, *а*).

График представляет собой гиперболу и состоит из двух ветвей.

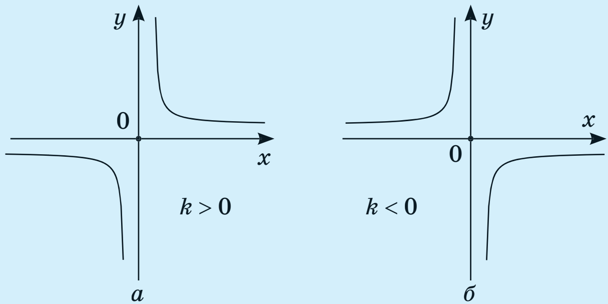


Рис. 3.16

3.3.3. Квадратичная функция, ее график

Функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$ называется **квадратичной**.

Если $b = c = 0$, то $y = ax^2$.

График этой функции — парабола с вершиной в точке (0; 0), обращенная ветвями вверх при $a > 0$ (рис. 3.17, *а*) и вниз при $a < 0$ (рис. 3.17, *б*).

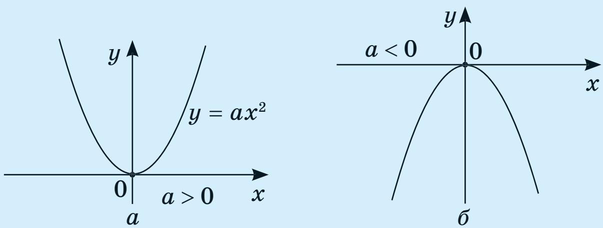


Рис. 3.17

В общем случае выделим полный квадрат:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ получается из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом на $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ вдоль оси Ox и на $\left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$ вдоль оси Oy; координаты вершины $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Пример. Построить график: а) $y = 3x^2 - 6x + 5$; б) $y = -x^2 + 4x - 3$.

Решение: а) координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1;$$

$$y_0 = c - \frac{b^2}{4a} = 2.$$

Переносим вершину параболы $y = 3x^2$ в точку (1; 2) и строим ее (рис. 3.18).

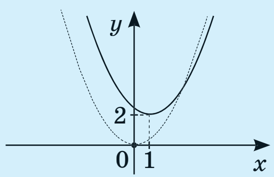


Рис. 3.18

Другой способ решения:

$$y = 3x^2 - 6x + 5 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{5}{3}\right) =$$

$$= 3\left((x-1)^2 + \left(\frac{5}{3} - 1\right)\right) = 3(x-1)^2 + 2.$$

Имеем параболу вида $y = 3x^2$, смещенную на 1 единицу вправо вдоль оси Ox и на 2 единицы вверх вдоль оси Oy.

б) координаты вершины:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

$$y_0 = c - \frac{b^2}{4a} = 1.$$

Переносим вершину параболы $y = -x^2$ в точку (2; 1) и строим ее (рис. 3.19).

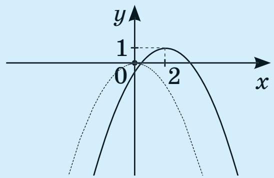


Рис. 3.19

Другой способ решения:

$y = -x^2 + 4x - 3;$

$y = -(x^2 - 4x + 3) =$

$= -((x - 2)^2 - 1) =$

$= -(x - 2)^2 + 1$ — это парабола вида $y = x^2$, ветвями вниз, смещенная на 2 единицы право вдоль оси абсцисс и на 1 единицу вверх вдоль оси ординат.

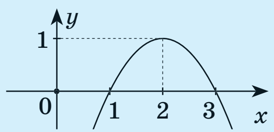


Рис. 3.20

Вершина (2; 1); точки пересечения параболы с осью абсцисс находим при $y = 0$, т. е. $(x - 2)^2 = 1$;

$x - 2 = \pm 1$; $x = 2 \pm 1$;

$x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

3.3.4. Степенная функция с натуральным показателем, ее график

Функция $y = x^n$, где $n \in \mathrm{N}$ называется **степенной функцией с натуральным показателем**.

При $n = 1$ — линейная функция $y = x$; при $n = 2$ — квадратичная функция $y = x^2$.

Функция четна, если n четно, и нечетна, если n нечетно.

На рис. 3.21, *а*, *б* представлены графики степенной функции при $n \geq 2$ (при четном и нечетном n).

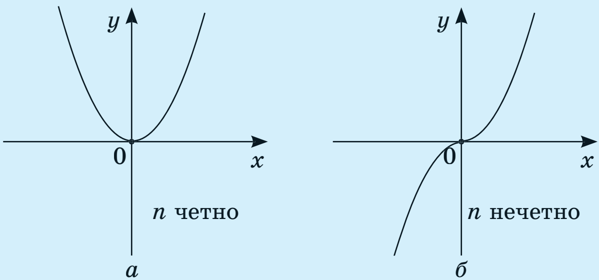


Рис. 3.21

3.3.5. Тригонометрические функции, их графики

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ — периодические с периодом 2π ($\sin x$ — нечетная, $\cos x$ — четная). Графики представляют собой синусоиды (рис. 3.22, *а*, *б*).

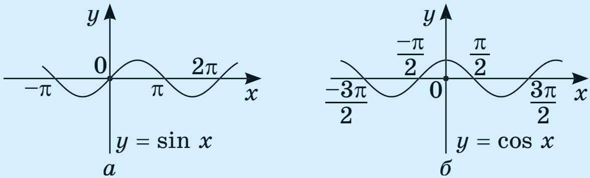


Рис. 3.22

Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетные, периодические с периодом π. Их графики представлены на рис. 3.23, *а*, *б*.

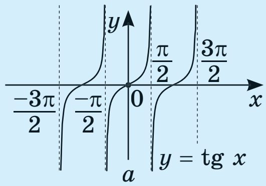


Рис. 3.23

Обратные тригонометрические функции

Функция $y = \arcsin x$ — обратная к $y = \sin x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 3.24, *а*).

$y = \arccos x$ — обратная к $y = \cos x$ при $x \in [0; \pi]$ (рис. 3.24, *б*).

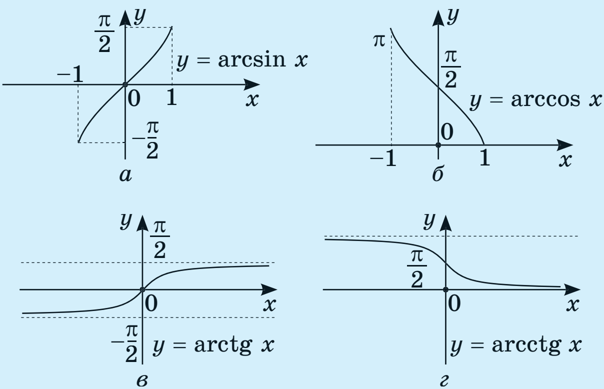


Рис. 3.24

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x;$$
$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

$y = \operatorname{arctg} x$ — обратная к $y = \operatorname{tg} x$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 3.24, *в*).

$y = \operatorname{arcctg} x$ — обратная к $y = \operatorname{ctg} x$ при $x \in (0; \pi)$ (рис. 3.24, *г*).

3.3.6. Показательная функция, ее график

Функция вида $y = a^x$; $a > 0$, $a \neq 1$ называется **показательной**.

При $a > 1$ монотонно возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает (рис. 3.25, *а*, *б*).

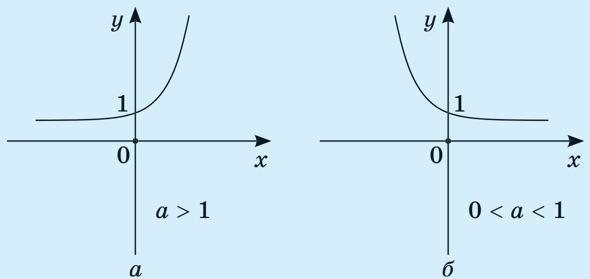


Рис. 3.25

3.3.7. Логарифмическая функция, ее график

Функция вида $y = \log_a x$; $a > 0$, $a \neq 1$ называется **логарифмической**.

Эта функция — обратная к $y = a^x$, определена только при $x > 0$.

При $a > 1$ функция монотонно возрастает, при $0 < a < 1$ — убывает (рис 3.26, *а*, *б*).

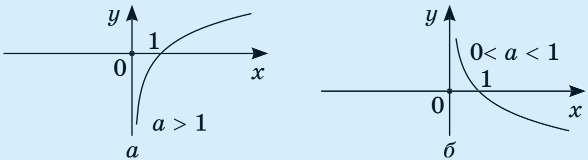


Рис. 3.26

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0). При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.

4 НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Производная

4.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором интервале, содержащем точку x_0, и пусть $x_1 \neq x_0$ — точка из этого интервала.

Приращением аргумента в точке x_0 называется величина $\Delta x = x_1 - x_0$, а **приращением функции** $f(x)$ в точке x_0, соответствующим данному приращению аргумента, называется величина $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

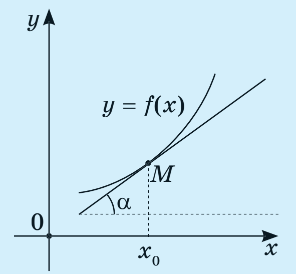


Рис. 4.1

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к 0:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Другая форма определения:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Геометрический смысл производной

Если к графику функции $y = f(x)$ в точке M с абсциссой x_0 можно провести касательную, не параллельную оси Oy, то угловой коэффициент этой касательной равен $f'(x_0)$ (рис. 4.1).

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

4

4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости протекания процесса, заданного формулой или графиком

Производная функции является **скоростью изменения** этой функции при изменении аргумента.

Если $s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени при прямолинейном движении, то зависимость скорости от времени выражается формулой: $v = s'(t)$

Пример. На рис. 4.2 изображен график движения (путь — функция от времени). В т. M проведена касательная к графику функции под углом в 45° к оси абсцисс. Найти скорость движения при $t = 2$ с.

Решение: скорость при $t = 2$ с равна $s'(2)$ и совпадает с угловым

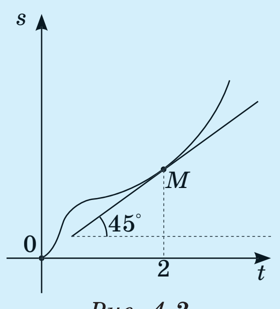


Рис. 4.2

коэффициентом касательной к графику при $t = 2$: $s'(2) = \mathrm{tg}\,45° = 1$.
Ответ: $v(t) = v(2) = 1$.

4.1.3. Уравнение касательной к графику функции

Если существует $f'(x_0)$, то уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Пример. Составить уравнение касательной к графику $y = x^2$; $x_0 = 3$.
Решение: $f(x) = x^2$; $f(x_0) = 3^2 = 9$.
$f'(x) = 2x$; $f'(x_0) = 2 \cdot 3 = 6$.
Уравнение касательной:
$y = 9 + 6 \cdot (x - 3)$; $y = 6x - 9$.

4.1.4. Производные суммы, разности, произведения, частного

При решении примеров будем пользоваться таблицей производных (раздел 4.1.5).

Свойства производных

$(u + v)' = u' + v'$	сумма производных
$(u - v)' = u' - v'$	разность производных
$(C \cdot u)' = C \cdot u'$	производная произведения константы на функцию
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	производная произведения
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	производная частного

Пример. Найти производные: а) $y = \cos x + 2\sqrt{x}$;

б) $y = (x^2 + 1)\sin x$; в) $y = \dfrac{x+1}{3x^2+2}$.

Решение:

а) $y' = (\cos x)' + 2\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = -\sin x + 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = -\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y' = (x^2 + 1)'\cdot\sin x + (x^2 + 1)\cdot(\sin x)' =$
$= 2x\sin x + (x^2 + 1)\cos x$;

в) $y' = \dfrac{(x+1)'\cdot(3x^2+2) - (x+1)\cdot(3x^2+2)'}{(3x^2+2)^2} =$

$= \dfrac{3x^2+2-6x(x+1)}{(3x^2+2)^2} = -\dfrac{3x^2+6x-2}{(3x^2+2)^2}$.

Ответ: а) $-\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; б) $2x\sin x + (x^2 + 1)\cos x$;
в) $-\dfrac{3x^2+6x-2}{(3x^2+2)^2}$.

4.1.5. Производные основных элементарных функций

Таблица производных

$C' = 0$ $(x^a)' = ax^{a-1}$ $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(\text{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Например: $x' = (x^1)' = 1\cdot x^0 = 1$; $(x^2)' = 2x$;

$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $(3^x)' = 3^x\cdot\ln 3$;

$(\log_5 x)' = \dfrac{1}{x\cdot\ln 5}$.

4.1.6. Вторая производная и ее физический смысл

Вторая производная функции — производная ее производной:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Вторая производная характеризует ускорение изменения функции при изменении аргумента. Если $s = s(t)$ — зависимость пройденного пути от времени при прямолинейном движении, то $a = s''(t)$ — зависимость ускорения от времени.

4.2. Исследование функций

4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков

Промежутки монотонности

Если $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на некотором промежутке, то функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке.

Пример 1. Найти промежутки монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение: $y' = 3x^2 - 6x$. Приравниваем производную к нулю: $3x^2 - 6x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Применяем метод интервалов (рис. 4.3).

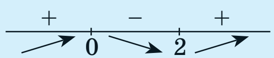


Рис. 4.3

Сверху обозначены знаки производной на промежутках $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$. Снизу указан

характер монотонности функции на этих промежутках («↑» — возрастание; «↓» — убывание).
Ответ: функция монотонно возрастает на $(-\infty; 0]$; $[2; +\infty)$; монотонно убывает на $(0; 2)$.

Экстремумы функций

Если $f'(x_0)$ существует и x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Если при переходе через точку x_0 возрастание функции сменяется убыванием, то x_0 — точка максимума, а если убывание сменяется возрастанием, то x_0 — точка минимума.

Пример 2. Найти точки и значения экстремумов функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
Решение: воспользуемся решением примера 1.
Точка $x = 0$ — точка максимума, точка $x = 2$ — точка минимума (рис. 4.3.), $y_{max} = y(0) = 1$;
$y_{min} = y(2) = -3$.

Схема исследования функций и построения графиков

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
3. Исследовать функцию на четность (нечетность), периодичность.
4. Найти производную и исследовать функцию на монотонность и экстремумы.
5. Исследовать поведение функции в граничных точках области определения.
6. Построить график функции.

4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических задачах

Наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции на отрезке могут достигаться либо в граничных точках отрезка, либо в точках экстремума на отрезке. В последнем случае производная в соответствующей точке обращается в нуль либо не существует.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке следует:

1. Найти производную функции.
2. Найти точки внутри отрезка, в которых производная обращается в нуль либо не существует.
3. Вычислить значение функции во всех найденных точках и в граничных точках отрезка; наибольшее из них и будет наибольшим, а наименьшее — наименьшим.

Пример. Стоимость единицы продукции, произведенной фирмой, составляет 15 у. е., а издержки производства, связанные с выпуском x единиц продукции, составляют: $C(x) = x^3 + 3x$.
Сколько единиц продукции должна произвести фирма, чтобы прибыль была максимальной?
Решение: стоимость x единиц составляет $15x$; прибыль: $f(x) = 15x - C(x) = 12x - x^3$.
Прибыль должна быть неотрицательной.
$12x - x^3 \geq 0$, $x \geq 0$; $x \cdot (12 - x^2) \geq 0$; $x \geq 0$; $x \in \left[0; \sqrt{12}\right]$.
$f(x) = 12x - x^3 \to \max$; $x \in \left[0; \sqrt{12}\right]$.

$f'(x) = 12 - 3x^2$; $12 - 3x^2 = 0$; $x_{1,2} = \pm 2$. $-2 \notin \left[0; \sqrt{12}\right]$; $x = 2$.

Вычисляем значения прибыли при $x = 0$; $x = 2$; $x = \sqrt{12}$. $f(0) = 0$; $f(2) = 16$; $f\left(\sqrt{12}\right) = 0$.

$\max\limits_{x \in \left[0; \sqrt{12}\right]} f(x) = f(2) = 16$.

Ответ: фирма для обеспечения максимальной прибыли должна произвести 2 единицы продукции.

4

4.3. Первообразная и интеграл

4.3.1. Первообразные элементарные функций

Первообразной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Если $F'(x)$ — первообразная $f(x)$, то все первообразные $f(x)$ имеют вид $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные неопределенные интегралы

$\int dx = x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$
2. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$
3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то
$\int f(kx+b)dx = \dfrac{F(kx+b)}{k} + C \quad (k \neq 0).$

Пример. Найти интегралы:

а) $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\cos^2 3x}\right)dx$; б) $\int\left((7-3x)^2 + \dfrac{4}{2x+5}\right)dx.$

Решение: а) $\int\left(\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\cos^2 3x}\right)dx = 2\int x^{-\frac{1}{3}}dx - \int \dfrac{dx}{\cos^2 3x} =$

$$= \frac{2\cdot x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - \frac{\operatorname{tg} 3x}{3} + C = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{\operatorname{tg} 3x}{3} + C.$$

б) $\int\left((7-3x)^2 + \dfrac{4}{2x+5}\right)dx = \int (7-3x)^2 dx + 4\int \dfrac{dx}{2x+5} =$

$$= \frac{(7-3x)^3}{(-3)\cdot 3} + \frac{4\cdot \ln|2x+5|}{2} + C = \frac{(3x-7)^3}{9} + 2\ln|2x+5| + C.$$

Ответ: а) $3\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{3} + C$; б) $\dfrac{(3x-7)^3}{9} + 2\ln|2x+5| + C.$

4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии

Определенным интегралом функции $f(x)$ в пределах от a до b называется приращение его первообразной на отрезке $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Приращение $F(x)$ на $[a; b]$ обозначается так:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

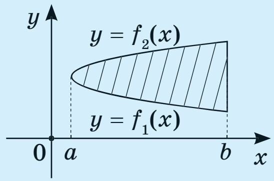


Рис. 4.4

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ (снизу), $y = f_2(x)$ (сверху), $x = a$ (слева), $x = b$ (справа), вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$; $y = x^2$.

Решение: на рис. 4.5 заштрихована искомая площадь. Для определения пределов интегрирования найдем абсциссы точек пересечения графиков: $x = x^2$; $x^2 - x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

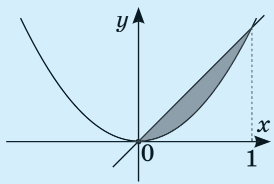


Рис. 4.5

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Если тело совершает прямолинейное движение со скоростью, зависящей от времени по закону $v = v(t)$, то путь, пройденный за время от момента $t = t_1$ до момента $t = t_2$, вычисляется по формуле:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

5 ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Планиметрия

5.1.1. Треугольник

Треугольник — это геометрическая фигура, состоящая из трех точек, называемых *вершинами* и не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки, называемых *сторонами*.

Треугольник называется **остроугольным**, если все его углы острые, **прямоугольным**, если один из углов прямой, и **тупоугольным**, если один из углов тупой (рис. 5.1, *а*, *б*, *в*).

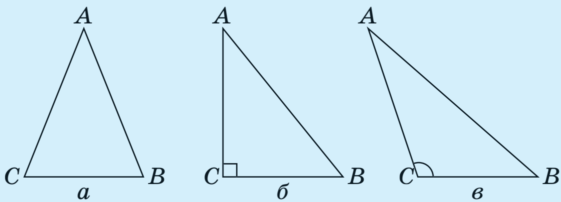


Рис. 5.1

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. При этом равные стороны называются *боковыми сторонами*, а третья — *основанием*.

Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны равны.

Основные свойства треугольников

- Против большей стороны в любом треугольнике лежит больший угол, и наоборот.
- Против равных сторон лежат равные углы, и наоборот.
- В равностороннем треугольнике все углы равны по 60°.
- Сумма углов любого треугольника равна 180°.
- Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Признаки равенства треугольников

Два треугольника равны, если:

- две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно сторонам и углу между ними другого треугольника;
- сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника;
- три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника.

Высота треугольника — это отрезок перпендикуляра, опущенный из любой вершины на противоположную сторону (или ее продолжение).

Три высоты треугольника или их продолжения всегда пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* (рис. 5.2).

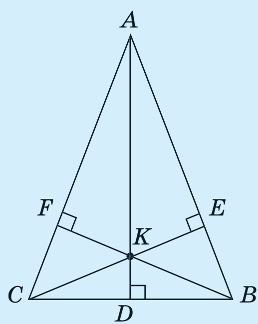


Рис. 5.2

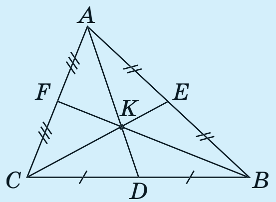


Рис. 5.3

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, называемой *центром тяжести* (рис. 5.3). Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Биссектриса треугольника — отрезок прямой, делящей внутренний угол треугольника пополам, проведенный из вершины треугольника до пересечения с противоположной стороной.

На рис. 5.4 AD — биссектриса угла A; CE — биссектриса угла C и BF — биссектриса угла B.

Три биссектрисы всегда пересекаются в одной точке, являющейся *центром окружности, вписанной в этот треугольник*.

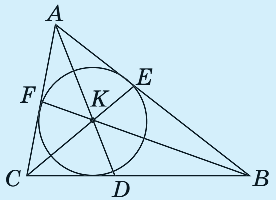


Рис. 5.4

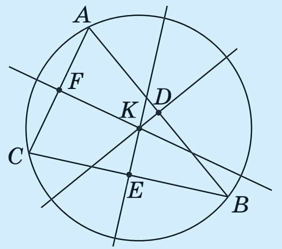


Рис. 5.5

Биссектриса делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам. На рис. 5.4 $AF : CF = AB : BC$.

Серединный перпендикуляр — это прямая, проведенная через середину стороны треугольника перпендикулярно к этой стороне (рис. 5.5).

Три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке K, совпадающей с центром описанной около этого треугольника окружности.

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.

Ортоцентр, центр тяжести, центры описанного и вписанного кругов совпадают только в равностороннем треугольнике.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон (рис. 5.6). Средняя линия параллельна одной из сторон и равна половине этой стороны.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Теорема косинусов

Если a, b, c — стороны треугольника, то

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

где γ — угол между сторонами a и b (рис. 5.7).

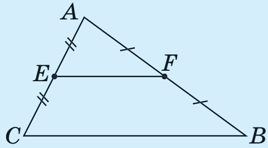


Рис. 5.6

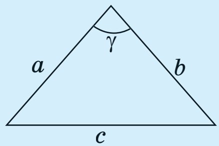


Рис. 5.7

Теорема синусов

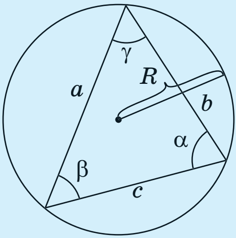


Рис. 5.8

Если a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — углы, лежащие соответственно напротив этих сторон, то:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности (рис. 5.8).

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma.$$

3. Формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Из формул площади треугольника находим радиусы описанной и вписанной окружности:

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p},$$

где a, b, c — стороны, S — площадь,

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

4. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов:

$$S = \frac{1}{2} ab.$$

5. Площадь равностороннего треугольника равна:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

где a — сторона треугольника.

6. Площади треугольника:

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а R — радиус описанной окружности; или

$$S = p \cdot r,$$

где r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника.

Признаки подобия треугольников

1. Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.
2. Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны.
3. Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны (в том же отношении, что и стороны), отношение периметров равно коэффициенту подобия, а отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия

Пример 1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D.

Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите AD, если $CE = 2$ (рис. 5.9).

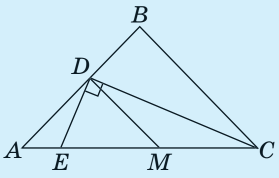


Рис. 5.9

Решение: проведем медиану DM прямоугольного ΔCDE. Тогда $DM = MC = ME = 1$; $\angle MDC = \angle DCM = \angle BCD$, поэтому $DM \parallel BC$. Поскольку ΔABC — равнобедренный и $DM \parallel BC$, ΔADM также равнобедренный. Значит, $AD = DM = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2. Один из катетов прямоугольного треугольника на 10 см больше другого и на 10 см меньше гипотенузы. Найти гипотенузу.

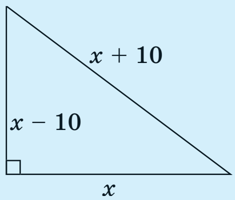


Рис. 5.10

Решение: пусть один из катетов равен x. Тогда другой будет равен $(x - 10)$, а гипотенуза — $(x + 10)$ (рис. 5.10). По теореме Пифагора:

$(x - 10)^2 + x^2 = (x + 10)^2$;

$x^2 - 20x + 100 + x^2 =$

$= x^2 + 20x + 100$;

$x^2 - 40x = 0$;

$x \cdot (x - 40) = 0$.

$x_1 = 0$ не удовлетворяет условию задачи, т. к. длина катета $x > 0$. $x_2 = 40$ — длина катета;

$40 + 10 = 50$ — длина гипотенузы.

Ответ: 50 см.

5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

Четырехугольник — фигура, состоящая из четырех точек, не лежащих на одной прямой (они называются *вершинами*), и четырех последовательно соединяющих эти точки непересекающихся отрезков (они называются *сторонами*).

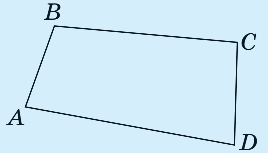


Рис. 5.11

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ (рис. 5.12).

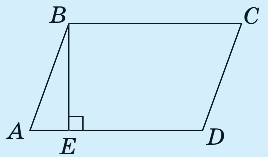


Рис. 5.12

Противолежащие стороны параллелограмма называются *основаниями*, а расстояние между ними — *высотой* (например, BE на рис. 5.12).

Свойства параллелограмма

- Противолежащие стороны равны.
- Противоположные углы равны.
- Диагонали делятся точкой пересечения пополам.
- Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна $180°$.

Площадь параллелограмма

- Площадь параллелограмма равна произведению основания на проведенную к нему высоту (рис. 5.13):
$$S = a \cdot h.$$
- Площадь параллелограмма равна произведению двух смежных сторон и синуса угла между ними (рис. 5.14):
$$S = ab \cdot \sin \gamma.$$

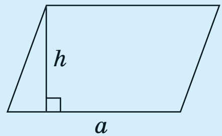


Рис. 5.13

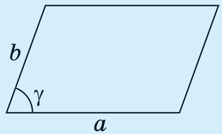
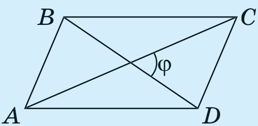


Рис. 5.14

- Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей и синуса угла между ними (рис. 5.15):

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi.$$

Прямоугольник — параллелограмм, все углы которого прямые (рис. 5.16).



$d_1 = AC$; $d_2 = BD$

Рис. 5.15

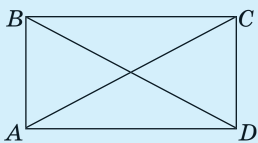


Рис. 5.16

Основные свойства прямоугольника

- Диагонали прямоугольника равны: $AC = BD$ (рис. 5.16).
- Квадрат диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его смежных сторон $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (рис. 5.16).
- Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон.

Ромб — параллелограмм, все стороны которого равны (рис. 5.17).

Квадрат — это прямоугольник с равными сторонами.

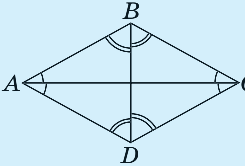


Рис. 5.17

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят углы пополам.
Площадь ромба равна половине произведения диагоналей

Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны

Пример. Диагонали ромба равны 24 см и 70 см. Найти сторону и площадь ромба.

Решение: диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке O пересечения делятся пополам (рис. 5.18):

$$OB = OD = \frac{BD}{2} = \frac{24}{2} = 12;$$

$$AO = CO = \frac{70}{2} = 35.$$

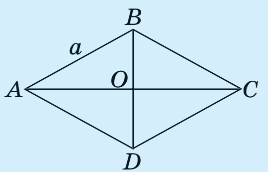


Рис. 5.18

Сторона ромба — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 12 см и 35 см. По теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{12^2 + 35^2} = 37. \quad S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 70 = 840.$$

Ответ: 37 см; 840 см^2.

5.1.3. Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие — не параллельны.

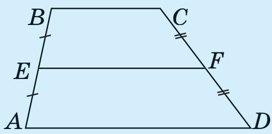


Рис. 5.19

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, — **средняя линия.** Трапеция называется **равнобедренной,** если ее боковые стороны равны

В трапеции $ABCD$ отрезок EF, соединяющий середины боковых сторон называется средней линией (рис. 5.19).

Свойства трапеции

- Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
- Диагонали равнобедренной трапеции равны; углы при ее основании равны.
- Ось симметрии равнобедренной трапеции перпендикулярна ее основаниям.
- Около равнобедренной трапеции можно описать окружность.
- В трапецию можно вписать окружность, если сумма оснований равна сумме боковых сторон.
- Площадь трапеции равна произведению средней линии (полусуммы оснований) на высоту.

Пример 1. Основания равнобедренной трапеции равны 2 см и 8 см, боковая сторона равна 5 см. Найти площадь трапеции (рис. 5.20).

Решение: по условию трапеция $ABCD$ — равнобедренная, отсюда: $AB = CD$, а т. к. $BE = CH$,

то и $AE = HD = \dfrac{8-2}{2} = 3.$

Из ΔABE ($\angle E = 90$): $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4;$

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BE = \frac{2+8}{2} \cdot 4 = 20.$$

Ответ: 20 см^2.

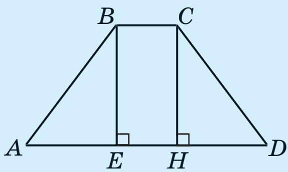


Рис. 5.20

Пример 2. В прямоугольной трапеции боковые стороны 3 см и 5 см, а меньшая диагональ равна $\sqrt{58}$. Найти периметр трапеции (рис. 5.21).

Решение: в прямоугольной трапеции одна из боковых сторон перпендикулярна основанию (рис. 5.21, $AB \perp AD$).

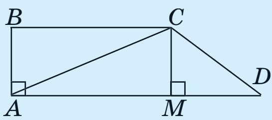


Рис. 5.21

Пусть $AB = 3$ см, $CD = 5$ см, $AC = \sqrt{58}$ см.

В ΔABC ($\angle B = 90°$):

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{58 - 3^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ см}.$$

Проводим $CM \perp AD$, тогда $CM = AB = 3$ см, $AM = BC = 7$ см. В ΔCMD ($\angle M = 90°$):

$$MD = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ см}.$$

$AD = AM + MD = 7 + 4 = 11$ (см).

Периметр трапеции: $P = 3 + 5 + 7 + 11 = 26$ (см).

Ответ: 26 см.

5.1.4. Окружность и круг

Окружностью называется геометрическое множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром окружности*, на расстояние, называемое *радиусом* (рис. 5.22).

Хорда — отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности.

Длина окружности l вычисляется по формуле:

$$l = 2\pi R \text{ или } l = \pi D,$$

$$D = 2R.$$

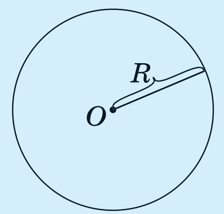


Рис. 5.22

Длина дуги окружности вычисляется по формуле:

$$l_{\smile} = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ,$$

где n° — градусная мера угла.

Кругом называется геометрическое множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше заданного числа.

Площадь круга вычисляется по формуле:

$$S = \pi R^2 \text{ или } S = \frac{\pi d^2}{4},$$

где $d = 2R$ — диаметр окружности.

Круговым сектором называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

Площадь кругового сектора вычисляется по формуле:

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ,$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла, или

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\alpha R^2}{2},$$

где α — радианная мера центрального угла.

Круговым сегментом называется общая часть круга и полуплоскости.

Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_\Delta,$$

где n° — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а S_Δ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и в концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «−» нужно брать, когда $n^\circ < 180^\circ$, а знак «+» нужно брать, когда $n^\circ > 180^\circ$.

Центральный угол — угол с вершиной в центре окружности; он равен градусной мере дуги, на которую опирается (рис. 5.23).

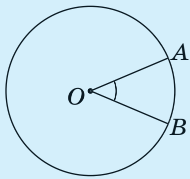


Рис. 5.23

Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность; он равен половине градусной меры дуги, на которую опирается (рис. 5.24).

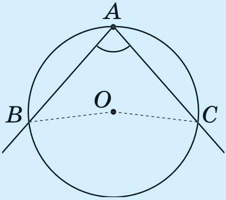


Рис. 5.24

Центральный угол, образуемый дугой единичной окружности, равной по длине радиусу, принимается за 1 радиан. Отношение длины окружности к диаметру обозначается π; π ≈ 3, 14159

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью ровно одну общую точку.

Свойства касательной

- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу (диаметру), проведенному в точку касания (рис. 5.25).
- Из точки вне круга можно провести к окружности две касательные. Длины этих касательных будут равны. Биссекриса угла между этими касательными проходит через центр окружности.
- Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.

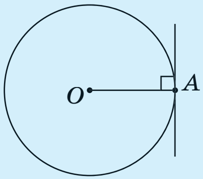


Рис. 5.25

Если прямая имеет две общие точки с окружностью, тогда говорят, что прямая и окружность пересекаются. В таком случае прямую называют *секущей*.

Пример. В окружности проведена хорда и через один из концов хорды проходит касательная к окружности. Вычислить угол, составленный касательной и хордой, если хорда делит окружность в отношении 5 : 7 (рис. 5.26).

Решение: пусть O — центр окружности, AB — хорда. Обозначим меньшую и большую дуги с концами A и B соответственно $5x$ и $7x$. Тогда $5x + 7x = 360°$, откуда $x = 30°$. Следовательно, величина меньшего из углов AOB равна 150°.

Из ΔAOB (равнобедренного) получаем:
$\angle ABO = \angle BAO = 15°$.
Касательная, проходящая через точку B, перпендикулярна к OB и, следовательно, образует с хордой AB угол:
$90° - 15° = 75°$.
Ответ: 75°.

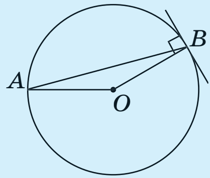


Рис. 5.26

5.1.5. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника

Окружность называется **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон. Ее центр — точка пересечения биссектрис треугольника (рис. 5.27).

Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{S}{p},$$

где S — площадь треугольника, p — его полупериметр.

Окружность называется **описанной около треугольника**, если она проходит через все его

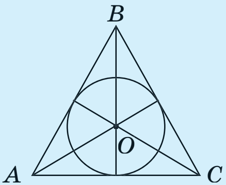


Рис. 5.27

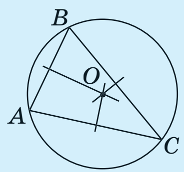


Рис. 5.28

вершины. Ее центр — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (рис. 5.28).

Радиус описанной окружности:

$$R = \frac{abc}{4S},$$

где a, b, c — стороны треугольника; S — площадь.

Пример. Длины сторон треугольника 5 см, 7 см, 10 см. Найти радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решение:

$$a = 5;\ b = 7;\ c = 10.\ \ p = \frac{a+b+c}{2} = 11.$$

По формуле Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1} = 2\sqrt{66}.$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{66}}{11};\ \ R = \frac{abc}{4S} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 10}{8\sqrt{66}} = \frac{175}{4\sqrt{66}} = \frac{175\sqrt{66}}{264}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{66}}{11}$ см; $\frac{175\sqrt{66}}{264}$ см.

5.1.6. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника

Многоугольником называется простая (без самопересечений) замкнутая ломаная линия при условии, что ее соседние звенья не лежат на одной прямой. Многоугольником также называют и область, ограниченную такой линией.

Выпуклым многоугольником называют многоугольник, все вершины которого расположены в одной полуплоскости относительно любой прямой, проходящей через соседние вершины. На рис. 5.29, *а* изображен выпуклый многоугольник, а на рис. 5.29, *б* — невыпуклый.

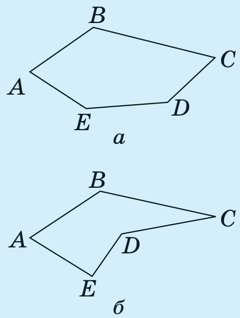


Рис. 5.29

> Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° \times (n - 2)$

5.1.7. Правильные многоугольники. Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника

Правильный многоугольник — это выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны и все углы между собой также равны.

В частности, равносторонний треугольник и квадрат — правильные многоугольники.

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, R_n и r_n — радиусы описанной и вписанной окружностей.

> В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность

Тогда: $a_n = 2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}\cdot r_n$; $a_n = 2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cdot R_n$.

Полезно знать следующие утверждения:

1. Взятые через одну вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.

2. Середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.

3. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника.

4. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности.

Задача. В окружность радиуса 4 см вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найти радиус окружности, описанной около квадрата.

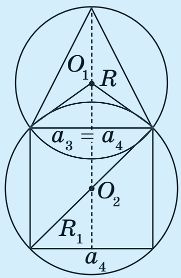


Рис. 5.30

Решение: $R = 4$ см;

$R = \dfrac{a_3}{\sqrt{3}}$; $\dfrac{a_3}{\sqrt{3}} = 4$;

$a_3 = 4\sqrt{3}$. По условию задачи $a_4 = a_3 = 4\sqrt{3}$.

$$R_1 = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}.$$

Ответ: радиус описанной окружности около квадрата равен $2\sqrt{6}$ см.

5.2. Прямые и плоскости в пространстве

5.2.1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые. Перпендикулярность прямых

Прямые в пространстве могут быть **параллельными** (рис. 5.31, *а*), **пересекающимися** (рис. 5.31, *б*) или **скрещивающимися** (рис. 5.31, *в*). Прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

Основные аксиомы стереометрии

- Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
- Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

Свойства прямых и плоскостей в пространстве

- Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.
- Если две точки прямой лежат в плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

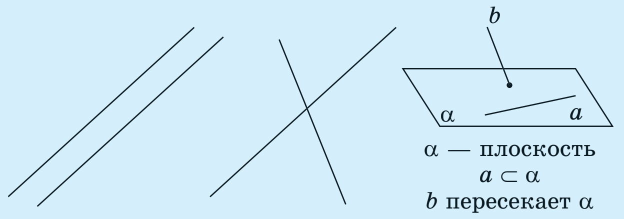
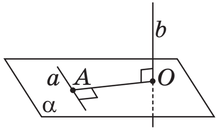


Рис. 5.31

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок, перпендикулярный к каждой из этих прямых, концы которого принадлежат этим прямым. Общий перпендикуляр единственен, его длина называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми.**



На рисунке прямая a лежит в плоскости α, прямая b пересекает плоскость α и не пересекает прямую a; OA — расстояние между скрещивающими прямыми, т. е. $OA \perp a$ и $OA \perp b$.

- Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и притом только одну.
- Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.
- Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

5.2.2. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства

Прямая называется **параллельной плоскости**, если она не имеет с этой плоскостью общих точек или лежит на ней.

Свойства параллельных прямой и плоскости

- Если через прямую a, параллельную плоскости α, провести плоскость β, пересекаю-

Признак параллельности
Если прямая a параллельна какой-либо прямой на плоскости α, то $a \parallel \alpha$

щую плоскость α по прямой b, то $a \parallel b$ (рис. 5.32).

- Если прямые скрещиваются, то найдется плоскость, параллельная обеим прямым.

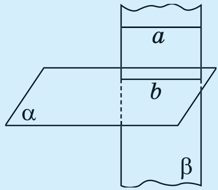


Рис. 5.32

Пример. Дан параллелограмм $ABCD$ (рис. 5.33). Стороны AB и CD пересекают плоскость α в точках M и K соответственно. Сторона AD параллельна плоскости α: $AM : MB = 3 : 5$. Найти CK и KD, если $AB = 24$ см.

Решение: пусть $AM = 3x$; $MB = 5x$. $3x + 5x = 24$; $8x = 24$; $x = 3$. $AM = 9$ см; $MB = 15$ см. Поскольку $AD \parallel \alpha$, то $AD \parallel MK$, т. е. $AMKD$ — параллелограмм. Отсюда $KD = 9$ см; $CK = 15$ см.

Ответ: 9 см; 15 см.

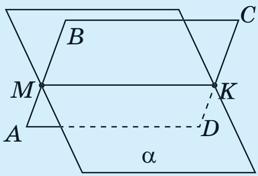


Рис. 5.33

5

5.2.3. Параллельность плоскостей, признаки и свойства

Плоскости называются **параллельными**, если они не имеют общих точек

Признаки параллельности плоскостей

- Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум пересекающимся прямым другой плоскости, то плоскости параллельны. $\alpha \parallel \beta$ (рис. 5.34).

- Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны между собой (рис. 5.35).

$$\begin{pmatrix} a \perp \alpha \\ a \perp \beta \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha \parallel \beta).$$

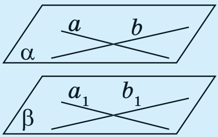


Рис. 5.34

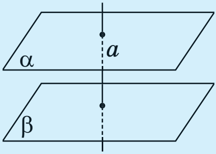


Рис. 5.35

Свойства параллельных плоскостей

- Если две параллельные прямые не пересечены третьей, то прямые параллельны. Если $a \parallel b$ и c не пересекает a, b, то $a \parallel b \parallel c$ (рис. 5.36).
- Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны. $\alpha \parallel \beta$; A и B принадлежат α; A_1, B_1 принадлежат β. $AA_1 \parallel BB_1$, отсюда $AA_1 = BB_1$ (рис. 5.37).

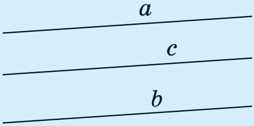


Рис. 5.36

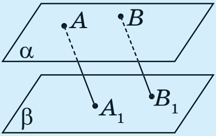


Рис. 5.37

- Если плоскость α параллельна плоскости β, а плоскость β параллельна плоскости γ, то α ∥ γ.
- Через точку вне данной плоскости проходит единственная плоскость, параллельная этой плоскости.

5.2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах

5

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

- Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости, то она перпендикулярна плоскости. Если $c \perp a$ и $c \perp b$, a и b пересекаются в плоскости α, то $c \perp \alpha$ (рис. 5.38).
- Прямая, перпендикулярная одной из параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой $(\alpha \parallel \beta,\ c \perp \alpha) \Rightarrow (c \perp \beta)$ (рис. 5.39).

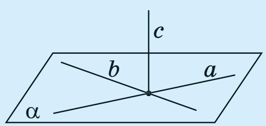


Рис. 5.38

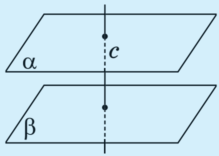


Рис. 5.39

Свойства перпендикуляров

- Прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна этой плоскости, если она перпен-

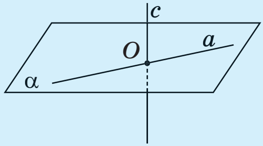


Рис. 5.40

дикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через точку пересечения. Если $c \perp a$, лежащей в плоскости α, O — точка пересечения c и α, то $c \perp \alpha$.

- Две прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны между собой $(a \perp \alpha, b \perp \alpha) \Rightarrow (a \parallel b)$ (рис. 5.41).
- Через любую точку пространства проходит ровно одна прямая, перпендикулярная данной плоскости. A — любая точка пространства. AO — единственный перпендикуляр к плоскости α (рис. 5.42).

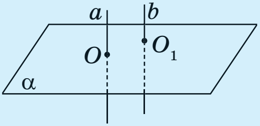


Рис. 5.41

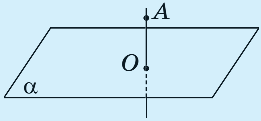
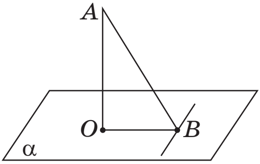


Рис. 5.42

Теорема о трех перпендикулярах
Прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной, проведенной к этой плоскости, тогда и только тогда, когда она перпендикулярна ортогональной проекции этой наклонной на плоскость



Наклонной, проведенной из точки к плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром.

Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки, называется *ортогональной проекцией наклонной*.

Перпендикуляр короче любой наклонной, проведенной из этой же точки: $OA < AB$

Пример. Высота прямоугольного ΔABC (рис. 5.43), опущенная на гипотенузу, равна 9,6 см. Из вершины C прямого угла восстановлен к плоскости (ABC) перпендикуляр CM, причем $CM = 28$ см. Найдите расстояние от точки M до AB.

Решение: пусть CK — высота ΔABC. Тогда MK — наклонная к плоскости (ABC), а CK — ее ортогональная проекция на (ABC). Так как $CK \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах $MK \perp AB$. Значит, расстояние от M до AB равно длине MK.

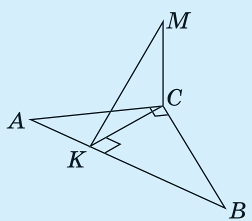


Рис. 5.43

Из ΔMCK по теореме Пифагора находим:

$$MK = \sqrt{9{,}6^2 + 28^2} = 29{,}6.$$

Ответ: 29,6 см.

5.2.5. Перпендикулярность плоскостей, признак и свойства

- **Признак перпендикулярности двух плоскостей**
  - Две пересекающиеся плоскости перпендикулярны, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.
  - Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.
- **Свойства перпендикулярных плоскостей**
  - Если из точки, принадлежащей одной из двух перпендикулярных плоскостей, провести перпендикуляр к другой плоскости, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.
  - Если в одной из двух перпендикулярных плоскостей провести перпендикуляр к их линии пересечения, то он будет перпендикулярен другой плоскости.
  - Две плоскости взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда одна из них проходит через перпендикуляр к другой.

5.2.6. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур

Параллельной проекцией точки A на плоскость α называется точка пересечения прямой p, проходящей через точку A и параллельной направлению проектирования, с плоскостью проектирования α.

При параллельном проектировании задаются плоскость проектирования α и направление проектирования — прямая l (рис. 5.44).

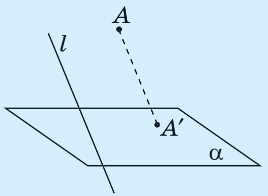


Рис. 5.44

Свойства параллельного проектирования

- Параллельная проекция прямой — это точка или прямая.
- Прямая, не параллельная проектирующей, переходит в прямую.
- Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
- При параллельном проектировании сохраняется пропорциональное отношение отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой. Длины отрезков при параллельном проектировании сохраняются, если отрезки параллельны плоскости проектирования.

При параллельном проектировании на плоскость каждой точки пространственной фигуры получается изображение фигуры

Свойства изображений

- Параллельные отрезки фигуры изображаются параллельными отрезками.
- Если плоская фигура параллельна плоскости проекций, то она проектируется в равную ей фигуру.
- При параллельном переносе плоскости проекций величина проекций не изменится.

При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой, поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции. Значит, проекции медиан — медианы проекций

Пример. Дана параллельная проекция треугольника (рис. 5.45). Как построить проекции медиан этого треугольника?

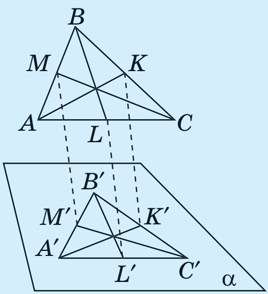


Рис. 5.45

Решение: При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

5.3. Многогранники

5.3.1. Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма

Призма — многогранник, две грани которого — равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные грани —параллелограммы, имеющие общие стороны с этими многоугольниками.

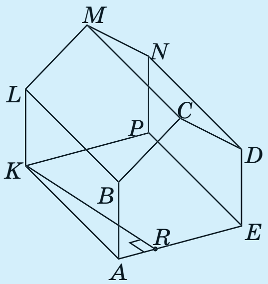


Рис. 5.46

Прямая призма — призма, у которой боковые ребра перпендикулярны основанию.

Правильная призма — прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник

Элементы призмы

- *Основания* — две грани, являющиеся равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях ($ABCDE$, $KLMNP$).
- *Боковые грани* — все грани, кроме оснований. Это параллелограммы.
- *Боковая поверхность* — объединение боковых граней.
- *Полная поверхность* — объединение оснований и боковой поверхности.
- *Боковые ребра* — общие стороны боковых граней (AK, BL, CM, DN, EP).
- *Высота* — отрезок, соединяющий основания призмы и перпендикулярный им (KR).
  Боковые ребра параллельны и равны.

5.3.2. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, параллелепипеде

Параллелепипед — призма, основанием которой является параллелограмм.

Диагональ — отрезок, соединяющий вершины, не принадлежащие одной грани

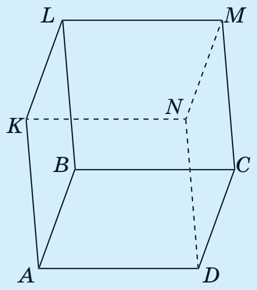


Рис. 5.47

Параллелепипед называется *прямоугольным*, если основанием его служит прямоугольник, а боковые ребра перпендикулярны к плоскости основания.

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, все грани которого являются квадратами.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке (их общей середине). Параллелепипед симметричен относительно этой точки (центра симметрии).

Куб симметричен также относительно трех плоскостей симметрии, проходящих через центр симметрии параллельно граням, и шести плоскостей диагональных сечений.

5.3.3. Пирамида, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида, правильная пирамида

Пирамида — многогранник, состоящий из плоского многоугольника — *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания, — *вершины*, и всех

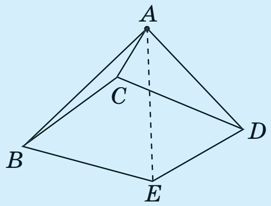


Рис. 5.48

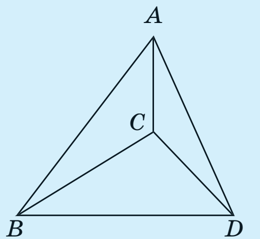


Рис. 5.49

отрезков, соединяющих вершину с точками основания (рис. 5.48).

Боковые ребра соединяют вершину пирамиды с вершинами основания.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней (треугольников, образующих боковую поверхность).

Высота пирамиды — перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания

Треугольная пирамида — пирамида, в основании которой лежит треугольник (рис. 5.49).

Правильная пирамида — пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (рис. 5.50).

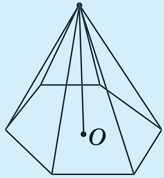


Рис. 5.50

Боковые ребра правильной пирамиды равны, боковые грани — равные равнобедренные треугольники

5.3.4. Сечения куба, призмы, пирамиды

Сечение многогранника — многоугольник, полученный в результате пересечения многогранника с секущей плоскостью.

Сечения куба — трех-, четырех-, пяти-, шестиугольники. Сечения треугольной призмы и четырехугольной пирамиды — трех-, четырех-, пятиугольники. Сечения треугольной пирамиды — трех-, четырехугольники.

Пример. Построить сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.51) плоскостью, проходящей через ребро AA_1 и точку M ребра CD.

Решение: через точку M и прямую AA_1 можно провести плоскость (обозначим ее α), и притом только одну. Найдем, как эта плоскость пересекается с гранями и ребрами параллелепипеда:

1. Так как точки A и M — общие для плоскостей α и $(ABCD)$, то AM — прямая их пересечения. Соединим точки A и M отрезком.

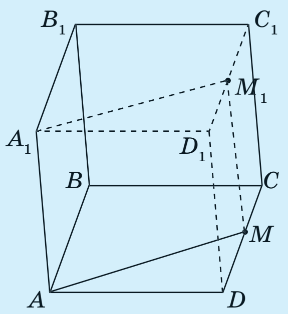


Рис. 5.51

2. Так как плоскости (ABB_1A_1) и (DCC_1D_1) параллельны, то плоскость α пересекает их по параллельным прямым. Через точку M параллельно ребру CC_1 проведем прямую MM_1 (M_1 — точка пересечения с ребром C_1D_1).

3. Так как точки A_1 и M_1 — общие для пло-

скостей α и $(A_1B_1C_1D_1)$, то прямая A_1M_1 — прямая пересечения этих плоскостей. Соединим точки A_1 и M_1.

Искомое сечение — четырехугольник AMM_1A_1 (рис. 5.51).

5.3.5. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)

Правильным называется многогранник, все грани которого — равные между собой правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и то же число граней.

Существует 5 видов выпуклых правильных многогранников. Это *тетраэдр* (правильная треугольная пирамида: 4 грани, 6 ребер, 4 вершины); *куб* (6 граней, 12 ребер, 8 вершин); *октаэдр* (8 граней, 12 ребер, 6 вершин); *додекаэдр* (12 граней, 30 ребер, 20 вершин); *икосаэдр* (20 граней, 30 ребер, 12 вершин).

5.4. Тела и поверхности вращения

5.4.1. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка

Цилиндр — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими ее перпендикулярно образующей. Основания цилиндра отсекаются поверхностью на этих плоскостях.

Цилиндрическая поверхность — поверхность, полученная таким поступательным движением прямой (образующей) в пространстве, что выделенная точка образующей движется вдоль плоской кривой (направляющей)

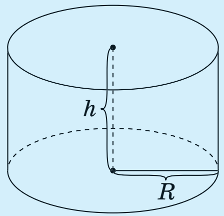


Рис. 5.52

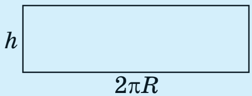


Рис. 5.53

В большинстве случаев под цилиндром понимают прямой круговой цилиндр (рис. 5.52), направляющая которого — окружность и основания перпендикулярны образующей.

Боковая поверхность ограничена цилиндрической поверхностью и расположена между секущими плоскостями.

Высота цилиндра — длина его образующей, а радиус — радиус основания.

Развертка цилиндра — прямоугольник с высотой, равной высоте цилиндра, и длиной, равной длине основания (рис. 5.53).

5.4.2. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка

Конус — тело, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (*вершины*) и проходящих через плоскую поверхность (*основание*).

Прямой круговой конус — тело вращения прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (*оси конуса*) (рис. 5.54).

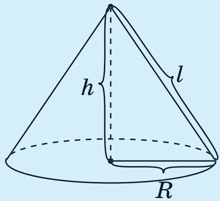


Рис. 5.54

Образующая — отрезок, соединяющий вершину и границу основания.

Боковая поверхность — объединение образующих конуса.

Высота — перпендикуляр из вершины к плоскости основания (и его длина).

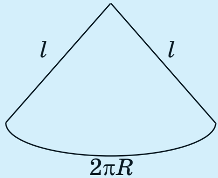


Рис. 5.55

Развертка прямого кругового конуса представляет собой круговой сектор (рис. 5.55). Его радиус равен длине образующей, а длина дуги — длине основания.

5.4.3. Шар и сфера, их сечения

Сфера — геометрическое множество точек в пространстве, удаленных от точки, называемой *центром*, на одинаковое расстояние, называемое *радиусом*.

Шар — тело, ограниченное сферой. Шар получается вращением полукруга (или круга) вокруг его диаметра (рис. 5.56).

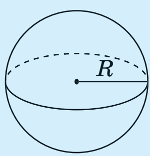


Рис. 5.56

Все плоские сечения шара — круги, а сечения сферы — окружности

5.5. Измерение геометрических величин

5.5.1. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности

Углом в 1° называется центральный угол, опирающийся на дугу окружности длиной в $\frac{1}{360}$ ее части.

Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу окружности, по длине равную радиусу.

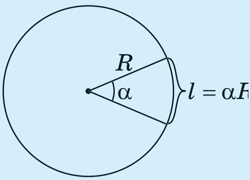


Рис. 5.57

$$1\ \text{рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ.$$

$$\alpha\ \text{рад} = \alpha \cdot \frac{180^\circ}{\pi};$$

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\ \text{рад}.$$

Если R — радиус окружности, то длина дуги, опирающейся на центральный угол α рад: $l = \alpha R$.

Соответственно $l = \frac{\pi\alpha R}{180^\circ}$, если α измеряется в градусах.

Пример. Найти длину дуги окружности радиуса 3 см, опирающейся на центральный угол 30°.

Решение: $l = \frac{\pi\alpha R}{180} = \frac{3\pi \cdot 30}{180} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ см.

Ответ: ≈1,57 см.

5.5.2. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью

Угол между прямыми в пространстве — меньший из углов, образованных двумя прямыми, проведенными через произвольную точку параллельно данным.

Угол между прямой и плоскостью — угол, образованный прямой и ее проекцией на плоскость ($0 \le \angle(a; \alpha) \le 90°$).

Пример. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5.58), все ребра которой равны 1, найти угол между прямой AB_1 и плоскостью (AA_1C_1C).

Решение: пусть D — середина A_1C_1. Тогда B_1D — перпендикуляр к плоскости (AA_1C_1C), а D — проекция точки B_1 на эту плоскость.

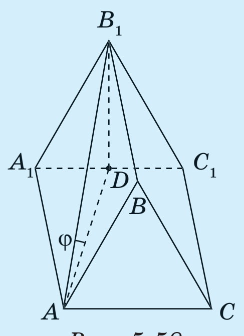


Рис. 5.58

Если φ — искомый угол, то $\sin\varphi = \dfrac{B_1D}{AB_1}$.

Из $\Delta A_1B_1C_1$, где все стороны по 1, находим:

$$B_1D = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из ΔAA_1B_1

$$AB_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

тогда $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

5.5.3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника

Длина отрезка — расстояние между его концами.

> Соседние звенья ломаной не должны лежать на одной прямой

Ломаная линия — геометрическая фигура, состоящая из отрезков, последовательно соединенных своими концами. На рис. 5.59, *а* изображена ломаная без самопересечений, на рис. 5.59, *б* — с самопересечением.

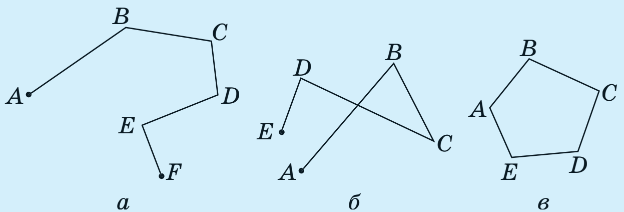


Рис. 5.59

Многоугольник — простая замкнутая ломаная без самопересечений, соседние звенья которой не лежат на одной прямой (рис. 5.59, *в*); вершины ломаной называют **вершинами многоугольника**, а звенья ломаной — **сторонами многоугольника**.

> Длина ломаной равна сумме длин ее звеньев

Периметр многоугольника — сумма длин его сторон.

Длина окружности:

$$l = 2\pi R,$$

где R — радиус окружности, $\pi \approx 3{,}14$.

5.5.4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными прямыми, параллельными плоскостями

Расстояние от точки до прямой (плоскости) — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую (плоскость).

Расстояние между параллельными прямыми (плоскостями) — длина отрезка их общего перпендикуляра.

5

Пример. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.60) найти расстояние от точки C_1 до плоскости (AB_1C).

Решение: так как $A_1C_1 \parallel AC$, то прямая A_1C_1 параллельна плоскости (AB_1C). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой A_1C_1 до плоскости (AB_1C). Например, расстояние от центра O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости (AB_1C) равно h.

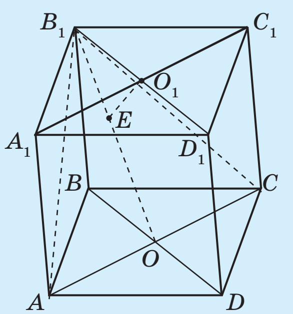


Рис. 5.60

Пусть E — основание перпендикуляра, проведенного из точки O_1 на прямую B_1O, где O — центр квадрата $ABCD$. Прямая O_1E лежит в плоскости (BB_1D_1D), а прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $O_1E \perp AC$ и O_1E — перпендикуляр к плоскости (AB_1C); $O_1E = h$. Так как $O_1B_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $OO_1 = 1$, то $OB_1 = \sqrt{\dfrac{1}{2}+1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Выражая двумя способами площадь ΔB_1O_1O, получим: $h\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1$, откуда $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора

Пусть в треугольнике a, b, c — стороны; γ — угол между сторонами a и b; $p=\frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; S — площадь; h_a — высота, проведенная к стороне a (рис. 5.61).

$$S_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot h_a;\quad S_\Delta=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma;$$

$$S_\Delta=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Площадь прямоугольного треугольника

$$S=\frac{1}{2}ab,$$

где a, b — катеты.

Площадь равностороннего треугольника

$$S_\Delta=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4},\text{ где } a \text{ — сторона.}$$

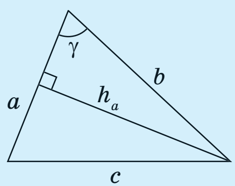


Рис. 5.61

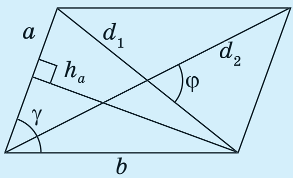


Рис. 5.62

Пусть в параллелограмме a, b — смежные стороны; γ — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a; d_1, d_2 — диагонали; S — площадь; φ — угол между диагоналями (рис. 5.62).

$$S_{\text{пар.}} = a \cdot h_a; \; S = ab \sin\gamma; \; S_{\text{пар.}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Площадь прямоугольника

$$S_{\text{пр.}} = ab, \text{ где } a,\ b \text{ — стороны.}$$

Площадь ромба

$$S_{\text{р.}} = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

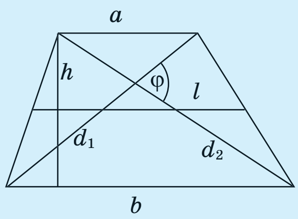


Рис. 5.63

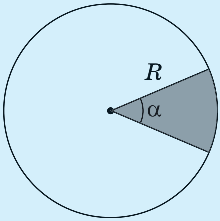


Рис. 5.64

Пусть в трапеции a, b — основания; h — высота; l — средняя линия; d_1, d_2 — диагонали; φ — угол между диагоналями; S — площадь (рис. 5.63).

$$S_{\text{трап.}} = lh; \; S = \frac{(a+b)h}{2}; \; S_{\text{трап.}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Пусть R — радиус круга; S — его площадь (рис. 5.64):

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2.$$

Площадь кругового сектора радиуса R с центральным углом α радиан:

$$S_{\text{сект.}} = \frac{1}{2} \alpha R^2.$$

5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы

- **Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса с образующей длины l и основанием радиуса R**

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl.$$

- **Площадь полной поверхности прямого кругового конуса**

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l).$$

- **Площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра с высотой H и радиусом основания R**

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH.$$

- **Площадь полной поверхности прямого кругового цилиндра**

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H).$$

- **Площадь сферы радиуса R**

$$S_{\text{сф.}} = 4\pi R^2.$$

5.5.7. Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара

- **Объем куба со стороной a**

$$V = a^3.$$

- **Объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c**

$$V = abc.$$

- **Пусть в пирамиде $S_{\text{осн.}}$ — площадь основания; h — высота; V — объем**

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}} \cdot h.$$

- **Пусть в призме S — площадь основания; h — высота; V — объем**

$$V = Sh.$$

- **Пусть в прямом круговом цилиндре R — радиус основания; h — высота; V — объем**

$$V = \pi R^2 h.$$

- **Пусть в прямом круговом конусе R — радиус основания; h — высота; V — объем**

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

- **Объем шара радиуса R**

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Пример 1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 1. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$. Найти объем цилиндра, описанного около этой призмы.

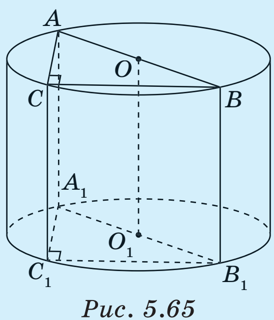


Рис. 5.65

Решение: так как по условию треугольная призма вписана в цилиндр, то ее основания (прямоугольные треугольники) вписаны в окружности — основания цилиндра, а середина гипотенузы треугольника является центром описанной окружности около треугольника. Радиус основания $R = \frac{1}{2}AB$.

Боковые ребра призмы являются образующими цилиндра, по условию задачи равны $\frac{2}{\pi}$. Высота OO_1 цилиндра равна образующей.

$V_{ц.} = \pi R^2 \cdot h$, где $h = \dfrac{2}{\pi}$. Из ΔABC ($\angle C = 90°$):
$AB = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; $R = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$; $V_{ц.} = \pi \cdot \dfrac{17}{4} \cdot \dfrac{2}{\pi} = \dfrac{17}{2} = 8{,}5$.
Ответ: 8,5 см^3.

Пример 2. Площадь поверхности шара уменьшили в 9 раз. Во сколько раз уменьшился объем шара?
Решение: пусть исходный радиус был R, а новый радиус стал r: $4\pi r^2 = \dfrac{1}{9} \cdot 4\pi R^2$.

$r = \dfrac{1}{3} \cdot R$. $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3$.
Ответ: в 27 раз.

5.6. Координаты и векторы

5.6.1. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Прямоугольная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат Ox и Oy, пересекающимися в точке O (начале координат). На каждой оси выбрано положительное направление и масштаб (единичный отрезок). Четыре угла, образованные осями, называются **квадрантами** (рис. 5.66).

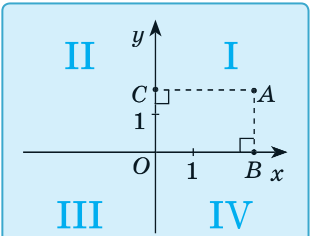


Рис. 5.66

Положение точки A определяется двумя координатами: x (*абсцисса*), y (*ордината*). Это длины соответственно отрезков OB и OC с соответствующими знаками (в I квадранте: $x > 0$, $y > 0$; во II квадранте: $x < 0$; $y > 0$; в III квадранте: $x < 0$, $y < 0$; в IV квадранте: $x > 0$, $y < 0$).

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями: *Ox* (*абсцисс*), *Oy* (*ординат*), *Oz* (*аппликат*) (рис. 5.67). Соответственно каждая точка имеет три координаты.

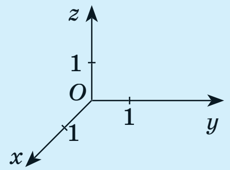


Рис. 5.67

5.6.2. Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы

Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ в пространстве

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 1. Вычислить расстояние между точками $A(1; -2; -3)$ и $B(3; 1; -9)$.

Решение: $d = \sqrt{(3-1)^2 + (1+2)^2 + (-9+3)^2} = 7$.

Ответ: 7.

Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Пример 2. Составить уравнение сферы с центром в точке $A(2; -1; 3)$, проходящей через точку $N(3; 2; 5)$.

Решение: $R = AN = \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{14}$.

Уравнение сферы: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 14$.

5.6.3. Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов, умножение вектора на число

Вектор — отрезок с выбранным на нем направлением.

У нулевого вектора $(\overline{0})$ начало и конец совпадают. Он не имеет направления.

Модуль вектора $\overline{AB}$ — длина отрезка AB; обозначается $\left|\overline{AB}\right|$.

Коллинеарными называются векторы, лежащие на параллельных прямых (в частности, на одной прямой).

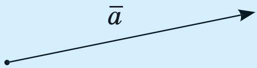


Рис. 5.68

Равными называются два вектора, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

Правило треугольника

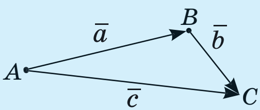


Рис. 5.69

Для сложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ нужно параллельно перенести вектор $\overline{b}$ так, чтобы его начало совпадало с концом вектора $\overline{a}$. Тогда их сумма — вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец — с концом вектора $\overline{b}$ (рис. 5.69):

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Правило параллелограмма

Для сложения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ нужно параллельно перенести их так, чтобы их начала находились в одной точке. Тогда их сумма — вектор $\overline{c}$, соответствующий диагонали параллелограмма, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 5.70):

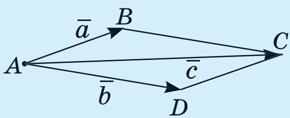


Рис. 5.70

$$\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}.$$

Основные свойства сложения векторов

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$; (переместительный закон);
2) $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$; (сочетательный закон);
3) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ (закон сложения вектора с нулевым вектором);
4) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$ (закон сложения противоположных векторов).

Разность векторов:
$\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$
(рис. 5.71).

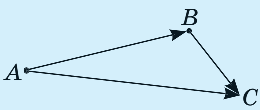


Рис. 5.71

Произведением вектора $\overline{a}$ на число k называется такой вектор $\overline{c}=k\overline{a}$, что $|\overline{c}|=|k|\cdot|\overline{a}|$, причем векторы $\overline{a}$ и $\overline{c}$ сонаправлены, если $k>0$, и противоположно направлены, если $k<0$ (рис. 5.72).

Вектор $(-1)\cdot\overline{a}$ называется *противоположным* вектору $\overline{a}$ и обозначается $(-\overline{a})$.

$$\overline{a}+(-\overline{b})=\overline{a}-\overline{b}.$$

На рис. 5.73 построен вектор $(\overline{a}-2\overline{b})$ (по заданным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$).

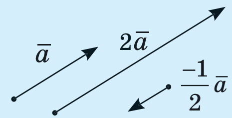


Рис. 5.72

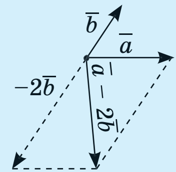


Рис. 5.73

5.6.4. Коллинеарные векторы; разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Определение коллинеарных векторов дано в пункте 5.6.3. Обозначение: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Нулевой вектор коллинеарен любому: $\overline{0} \parallel \overline{a}$.

Если $\overline{a} \parallel \overline{b}$ и $\overline{b} \neq \overline{0}$, то $\exists\, \lambda \mid \overline{a} = \lambda\overline{b}$.

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ на плоскости неколлинеарны, то для любого вектора $\overline{c}$ существуют такие числа x_1 и x_2 (коэффициенты разложения; определяются однозначно), что $\overline{c} = x_1\overline{a} + x_2\overline{b}$.

Пример. Пусть K — центр тяжести ΔABC (рис. 5.74). Разложить вектор $\overline{AK}$ по векторам $\overline{a} = \overline{AB}$ и $\overline{b} = \overline{AC}$.

Решение: так как K — центр тяжести треугольника, т. к. точка пересечения медиан, то

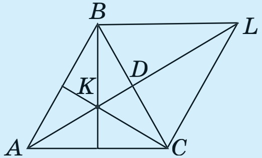


Рис. 5.74

$\overline{AK} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AD}$ (по свойству центра тяжести);

$\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AL} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}$ ($ABLC$ — параллелограмм).

$$\overline{AK} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b}\right) = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b}$.

5.6.5. Компланарные векторы; разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Компланарными называются ненараллельные векторы (три и более), параллельные одной плоскости. При откладывании от одной точки они будут лежать в одной плоскости.

Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда один из них можно разложить по двум другим:

$$\overline{c} = x\overline{a} + y\overline{b}.$$

Если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ некомпланарны, то любой вектор $\overline{d}$ можно однозначно разложить по этим векторам:

$$\overline{d} = x_1\overline{a} + x_2\overline{b} + x_3\overline{c}.$$

Любые три взаимно перпендикулярных ненулевых вектора некомпланарны.

Пример. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5.75). Разложить вектор $\overline{AK}$, где $\overline{a} = \overline{AB}$, $\overline{b} = \overline{AC}$, $\overline{c} = \overline{AA_1}$.

Решение: $\overline{AK} = \overline{AL} + \overline{LK}$;

$$\overline{AL} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{2} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2};$$

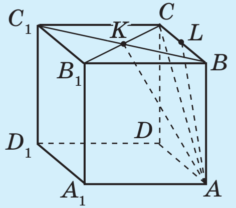


Рис. 5.75

$$\overline{LK} = \frac{\overline{AA_1}}{2} = \frac{\overline{c}}{2}. \quad \overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$.

5.6.6. Координаты вектора; угол между векторами; скалярное произведение векторов

Координатами вектора $\overline{a}$ **на плоскости (в пространстве)** называются коэффициенты его разложения по единичным векторам осей Ox, Oy (Ox, Oy, Oz) (рис. 5.76).

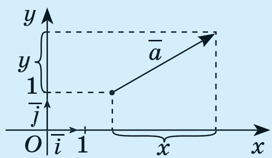


Рис. 5.76

а) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j}$;

б) $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$.

Координаты вектора равны разностям соответствующих координат конца и начала вектора:

$$x = x_B - x_A;\ y = y_B - y_A;\ z = z_B - z_A.$$

При сложении векторов координаты складываются, при умножении на число — умножаются на это число.

Пример 1. Пусть $A(2;\ -3;\ 1)$; $B(3;\ 5;\ 0)$; $C(6;\ 1;\ 5)$; $\overline{a} = \overline{AB}$; $\overline{b} = \overline{AC}$. Найти координаты вектора $\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$.

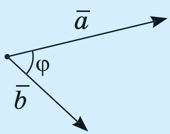


Рис. 5.77

Решение:

$\overline{a} = (3-2; 5+3; 0-1) =$

$= (1; 8; -1)$;

$\overline{b} = (6-2; 1+3; 5-1) =$

$= (4; 4; 4)$.

$\overline{p} = 3\overline{a} - 2\overline{b} = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 4; 3 \cdot 8 - 2 \cdot 4; 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4) =$
$= (-5; 16; -11).$

Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуется при совмещении их начал (рис. 5.77); $0 \leq \angle(\overline{a}; \overline{b}) \leq 180°$.

Скалярное произведение векторов

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\angle(\overline{a}; \overline{b})$. $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$; $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}|^2$;

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$, если $\overline{a} \perp \overline{b}$ (векторы взаимно перпендикулярны, т. е. угол между векторами a и b равен 90°, а cos 90° = 0).

Если $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$; $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то скалярное произведение векторов $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Аналогичные формулы — для векторов, лежащих в плоскости (отсутствует третья координата).

Угол между ненулевыми векторами

$$\varphi = \arccos \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \cdot (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}.$$

Условие перпендикулярности двух векторов

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z + b_z = 0.$$

Пример 2. Перпендикулярны ли векторы
$\overline{a} = (1; 2; 3)$ и $\overline{b} = (4; -5; 2)$?

Решение:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 = 0$. Следовательно, $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Ответ: да.

6 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

6.1. Элементы комбинаторики

6.1.1. Поочередный и одновременный выбор

Решение комбинаторных задач сводится обычно к применению двух правил: правила сложения и правила умножения.

Правило сложения
Если выбор элемента a можно осуществить m способами, а выбор элемента b — n способами, исключающими друг друга, то выбор одного из элементов (a или b) можно осуществить $(m + n)$ способами

Правило умножения
Если выбор элемента a можно осуществить m способами и после каждого такого выбора можно n способами осуществить выбор элемента b, то выбор пары элементов $(a; b)$ в указанном порядке можно осуществить $m \cdot n$ способами

Пример 1. Сколько существует двузначных и трехзначных чисел, все цифры которых различны?
Решение: определим количество двузначных чисел. Первую цифру можно выбрать 9 способами (кроме 0), вторую (после такого выбора) — также

9 способами (кроме первой). По правилу умножения: $9 \cdot 9 = 81$.
Ответ: 81.

Определим количество трехзначных чисел. Первые две цифры можно выбрать 81 способом, третью — 8 способами (кроме двух первых). По правилу умножения: $81 \cdot 8 = 648$.

Общее количество по правилу сложения:
$81 + 648 = 729$.

Пример 2. В лаборатории НИИ работает несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 человека знают английский и французский, 3 человека знают немецкий и французский, 2 человека знают немецкий и английский, 1 человек знает все 3 языка. Сколько человек работает в лаборатории? Сколько из них знает английский язык? Сколько человек знает лишь один язык?

Решение: найдем с использованием правила суммы (или правила сложения). Обозначим $n(\text{А})$, $n(\text{Н})$, $n(\text{Ф})$ количество сотрудников в лаборатории, которые знают английский, немецкий и французский языки соответственно; $n(\text{Н, Ф})$, $n(\text{Ф, Н})$, $n(\text{А, Ф})$, $n(\text{А, Н, Ф})$ — количество сотрудников, знающих по 2 и 3 языка соответственно.

Тогда по правилу суммы общее число сотрудников в лаборатории равно: $n = n(\text{А}) + n(\text{Н}) + n(\text{Ф}) - n(\text{Н, Ф}) - n(\text{А, Н}) - n(\text{А, Ф}) + n(\text{А, Н, Ф}) = 6 + 6 + 7 - 3 - 2 - 4 + 1 = 11$.

Только английский и немецкий языки знают:

$$n\text{АН} = n(\text{А, Н}) - n(\text{А, Н, Ф}) = 1 \text{ человек.}$$

Только английский и французский языки знают:

$$n\text{АФ} = n(\text{А, Ф}) - n(\text{А, Н, Ф}) = 3 \text{ человека.}$$

Английский язык знает:

$$n\text{А} = n(\text{А}) - n\text{АН} - n\text{АФ} - n(\text{А, Н, Ф}) = 1 \text{ человек.}$$

Только немецкий и французский языки знают:

$$n\text{НФ} = n(\text{Н, Ф}) - n(\text{А, Н, Ф}) = 2 \text{ человека.}$$

Больше одного языка знают:

$$m = n(\text{А, Н, Ф}) + n\text{АН} + n\text{АФ} + n\text{НФ} = 7 \text{ человек.}$$

И только один язык знают:

$$n1 = n - m = 4 \text{ человека.}$$

Ответ: 11 человек; 1 человек; 4 человека.

6.1.2. Формулы числа сочетаний, размещений и перестановок. Бином Ньютона

Перестановками на множестве из n элементов называются всевозможные группы из n различных элементов данного множества, различающихся порядком.

Количество различных перестановок на множестве из n элементов равно:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

(Читается «n факториал».)

Пример 1. Сколько существует способов рассадить 5 человек в ряд?

Решение: число способов равно количеству перестановок на множестве из 5 элементов:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Ответ: 120.

Сочетаниями по m элементов на множестве из n элементов ($m \le n$) называют всевозможные группы из m различных элементов данного множества, отличающиеся только составом (порядок безразличен).

Количество сочетаний по m элементов на множестве из n элементов обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или по формуле:

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}.$$

В частности, $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$; $C_n^{n-m} = C_n^m$.

Пример 2. Вычислить C_{11}^7.

Решение:

$$C_{11}^7 = C_{11}^{11-7} = C_{11}^4 = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 330.$$

Ответ: 330.

Пример 3. Дверь открывается одновременным нажатием 3 кнопок на кодовом замке, содержащем 10 кнопок. Сколько всего существует различных кодов?

Решение: количество кодов равно числу сочетаний из 10 по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 120.$$

Ответ: 120.

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0\cdot a^n + C_n^1\cdot a^{n-1}b + \ldots + C_n^k\cdot a^{n-k}b^k + \ldots +$$
$$+ C_n^{n-1}\cdot ab^{n-1} + C_n^n\cdot b^n$$

Пример 4. Раскрыть скобки в выражении $(a + b)^5$.

Решение:

$C_5^0 = 1;\ C_5^1 = 5;\ C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10;\ C_5^3 = C_5^2 = 10;$

$C_5^4 = C_5^1 = 5;\ C_5^5 = 1.$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$

Размещениями по m элементов на множестве из n элементов ($m \leq n$) называют всевозможные группы из m различных элементов данного множества, отличающиеся составом либо порядком.

Количество размещений по m элементов на множестве из n элементов обозначается A_n^m и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

или по формуле $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

В частности, $A_n^0 = 1;\ A_n^1 = n;\ \ldots;\ A_n^n = n!$

6.2. Элементы статистики

6.2.1. Табличное и графическое представление данных

Статистика изучает методы сбора, систематизации, обработки и интерпретации статистических данных, т. е. данных, связанных с различными массовыми явлениями и событиями.

При статистических исследованиях обычно применяют выборочное наблюдение, т. е. наблюдение, охватывающее не всю изучаемую совокупность, а только некоторую ее часть, называемую *выборкой*.

Генеральной совокупностью называют всю изучаемую совокупность

Для группировки статистических данных используют статистические таблицы.

Для изучаемых данных используется термин «варианта», а для числовой характеристики варианты — термин «признак». Число, показывающее, сколько раз та или иная варианта встречается в выборке, называется *частотой варианты*.

Таблица, устанавливающая связь между вариантами и соответствующими частотами, называется *частотной таблицей*:

Варианта	x_1	x_2	x_3	...	x_m
Частота	n_1	n_2	n_3	...	n_m

Объем выборки: $n = n_1 + n_2 + ... + n_m$.

Пример 1. При контроле знаний в классе из 25 человек были поставлены следующие оценки: 2, 3, 4, 3, 4, 5, 3, 5, 2, 4, 3, 3, 4, 4, 2, 5, 2, 4, 3, 4, 4, 3, 2, 5, 3. Составить частотную таблицу.

Решение: сгруппируем данные и разместим их в порядке возрастания признака (т. е. оценки): «2» — 5; «3» — 8; «4» — 8; «5» — 4: $n = 25$.

Оценка	2	3	4	5
Количество	5	8	8	4

Для большей наглядности используют графическое представление данных, в частности *полигоны*.

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают значения вариант x_k, а на оси ординат — значения частот n_k. Затем точки $(x_k;\ n_k)$ соединяют отрезками прямых и получают полигон частот (ломаную линию).

Пример 2. Построить полигон частот для примера 1.

Решение:

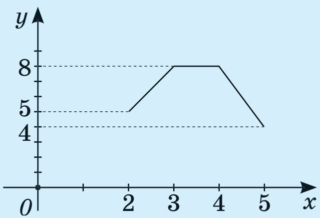


Рис. 6.1

6.2.2. Числовые характеристики рядов данных

Выборочным средним называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Мода выборки — это ее значение, которое встречается чаще всего (выборка может иметь несколько мод); обозначается Mo.

Медиана выборки — это число, которое «делит пополам» сгруппированную выборку, в которой каждое значение признака выписано столько раз, сколько оно принимается, т. е. медиана находится в середине этот ряда, если величина выборки — нечетное число, и равна среднему арифметическому двух средних варилант, если величина выборки — четное число; обозначается M_b.

Пример 1. Найти выборочное среднее, моду и медиану для примера 1.

Решение: среднее значение:

$$\bar{x}=\frac{5\cdot2+8\cdot3+8\cdot4+4\cdot5}{25}=3{,}44.$$

Выборка имеет 2 моды: 3 и 4 (встречаются одинаково часто — по 8 раз).

Медиана: $M_b = 3$ (находится посередине на 13-м месте).

Ответ: $\bar{x}=3{,}44$; $Mo \in \{3;\ 4\}$; $M_b = 3$.

Пример 2. Найти выборочное среднее, моду и медиану для выборки: 2; 3; 4; 3; 4; 2; 4; 5; 2; 4.

Решение: упорядочим выборку: 2; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5.

Среднее значение: $\bar{x}=\dfrac{3\cdot2+2\cdot3+4\cdot4+1\cdot5}{10}=3{,}3.$

Мода: 4.

На пятом месте: 3; на шестом месте: 4.

Поэтому медиана: $M_в=\dfrac{3+4}{2}=3{,}5.$

Ответ: 3,3; 4; 3,5.

6.3. Элементы теории вероятностей

6.3.1. Вероятности событий

Случайным событием называется явление, происходящее или не происходящее при определенных условиях.

Событие происходит в результате испытания. Например, испытание — подбрасывание монеты, событие — появление герба.

События, которые могут наступить в некотором испытании, называются *элементарными исходами*, если:

- при каждом повторении испытания происходит ровно одно из этих событий;
- они равновероятны, т. е. происходят в среднем одинаково часто.

Например, при бросании игральной кости это 6 событий: появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Классическое определение вероятности

Пусть при испытании возможно конечное число элементарных исходов. Вероятностью случайного события A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A (при которых A наступает) к общему числу элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где $P(A)$ — вероятность A, m — число благоприятствующих исходов, n — общее число элементарных исходов. $0 \le P(A) \le 1$.

Вероятность невозможного события равна 0, вероятность достоверного (происходящего обязательно) события равна 1.

Статистическое определение вероятности

В тех случаях, когда использование классического определения вероятности невозможно, применяют статистическое определение.

Пусть n — количество испытаний в некоторой серии испытаний, m — количество тех испытаний, в которых произошло событие A. Отношение $\frac{m}{n}$ называется *относительной частотой события* A в данной серии испытаний.

Известно, что при больших значениях n частоты $\frac{m}{n}$ в разных сериях испытаний практически совпадают и колеблются около некоторого числа $P(A)$, которое называют *статистической вероятностью события* A.

$$P(A) \approx \frac{m}{n}.$$

Например, если стрелок, сделав 1000 выстрелов в одинаковых условиях, попал в цель 700 раз, то вероятность его попадания можно оценить:

$$P(A) \approx \frac{700}{1000} = 0{,}7.$$

6.3.2. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

Пример 1. Количество рыб в озере неизвестно. Поймали 100 рыб, пометили и отпустили. Через некоторое время при такой же погоде выловили 50 рыб, среди которых оказалось 2 помеченные. Оценить количество рыб в озере.

Решение: пусть x — количество рыб в озере. В соответствии с классическим определением вероятности, вероятность того, что случайно выловленная рыба помечена, равна $\frac{100}{x}$. В соответствии со статистическим определением вероятности эта вероятность приближенно равна: $\frac{2}{50}=\frac{1}{25}$:

$\frac{100}{x} \approx \frac{1}{25}$; $x \approx 2500$.

Ответ: приблизительно 2500 рыб.

Пример 2. Для контроля качества из партии в 1000 деталей извлекли 100 деталей, среди которых оказалось 5 бракованных. Оценить количество бракованных деталей в партии.

Решение: вероятность брака приближенно равна $\frac{5}{100}=0,05$. Если количество бракованных деталей равно x, то вероятность брака равна $\frac{x}{1000}$:

$\frac{x}{1000} \approx 0,05$; $x \approx 50$.

Ответ: приблизительно 50 деталей.

Таким образом, по выборке можно оценить как величину генеральной совокупности (пример 1), так и ее отдельные признаки (пример 2).